Determinantes de matrices de tamaño cualquiera

1. Formas multilineales alternadas

Se precisa aquí trabajar con cuerpos que verifican una cierta condición que explicaremos en clase.

Podemos asumir sin problema $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. *Sean V, W espacios vectoriales. Una función $\omega : V \times V \times \cdots \times V \to W$ se dice*

1. **multilineal** *si*

2. **alternada** *si*

Observación 1.2. *Si ω es una forma alternada, y para ciertos i, j $v_i = v_j$ se tiene que $w(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0$. Si ω es multilineal alternada y algún v_i es combinación lineal de los restantes, se tiene $\omega(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0$.*

Demostración.

□

Es conveniente, para entender el siguiente resultado, compararlo con el que enuncia que conociendo una transformación lineal en una base, la conocemos en todo su dominio.

Proposición 1.3. *Sea $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ base de V y sea $w \in W$ un elemento cualquiera. Existe una única función $\omega : V \times V \times \cdots \times V \to W$ multilineal alternada tal que $F(e_1, e_2, \cdots, e_n) = w$.*

Demostración. En clase (sólo ideas, no se espera que lo escriban formalmente, porque es técnicamente complicado).

□

2. Definición de determinante

El siguiente resultado define la función **determinante**

Proposición 2.1. *Existe una única función de $M_n(\Bbbk)$ en $\Bbbk$ que verifica las siguientes tres propiedades.*

1. *La función vale* 1 *en* I_n.
2. *Si en una matriz se intercambian dos columnas, la función cambia de signo.*
3. *La función es lineal en cada columna: esto se explicará en clase.*

La notamos det y la llamamos **determinante**.

Demostración. Observar que, si pensamos una matriz cuadrada de tamaño n, como una n-upla de vectores de $\Bbbk^n$ (las columnas de la matriz), entonces una función que verifica 2 y 3 es una forma multilineal alternada de $\Bbbk^n \times \Bbbk^n \times \cdots \times \Bbbk^n \to \Bbbk$.
Por la Proposición 1.3, hay una única que vale 1 en I_n. □

3. Cálculo explícito

Recordemos el cálculo del determinante para una matriz 3×3.

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Es fácil ver que es efectivamente una función multilineal alternada que en I_3 vale 1.

Observar que cada sumando es, a menos de un signo, el producto de 3 factores, dónde hay exactamente uno de cada fila y exactamente uno de cada columna. Además la mitad de esos sumandos aparecen con signo positivo y la otra mitad con signo negativo.

Esta idea tiene para nosotros la impresición del signo asignado a cada producto de factores. Esto se puede definir con precisión. Mencionaremos algunas ideas en clase al respecto.

Usaremos esta idea de todos los sumandos posibles que utilicen n factores tales que sólo hay uno por fila y uno por columna, para calcular el determinante en general. En clase construiremos el caso del determinante de una matriz 4×4, y observaremos, cómo, para calcular el determinante de una matriz de tamaño

$n+1$ se puede recurrir a una de tamaño n.

La cantidad de sumandos para el caso de una matriz $n \times n$ es:
Aquí aparece la idea de **menor (i,j)** de una matriz, que vimos en clase y aparece en la Proposición 5.2 como la matriz $M_{i.j}$.

4. Otras propiedades

Proposición 4.1. *1. Si una matriz tiene dos columnas iguales, su determinante es* 0.

2. Si una matriz tiene una columna que es combinación lineal de las demás, su determinante es 0.

Demostración. Se deduce de que *det* es una función multilineal alternada en las columnas y de la observación 1.2. □

Observación 4.2. *Desarrollo por una columna*

Observación 4.3. Filas versus columnas
De las consideraciones sobre cómo calcular el determinante, se deduce que todo lo que se asegura por filas, puede hacerse por columnas. En particular $det(A^t) = det(A)$.
Además, si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo. El determinante es lineal en cada fila. Si dos filas son iguales, el determinante es 0. *Si una fila es combinación lineal de las demás, el determinante es* 0.
También vale el **desarrollo por una fila**.

5. Determinantes e invertibilidad

La propiedad fundamental de los determinantes y que permite relacionarlo con la invertibilidad de una matriz es la siguiente.

Proposición 5.1.

$$det(AB) = det(A)det(B), \text{ para cualesquiera matrices cuadradas } A, B \text{ de tamaño } n$$

Demostración. Fijemos A una matriz cuadrada de tamaño n y consideremos las siguientes dos funciones:

$$D, D' : M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}, \text{ definidas por } D(X) = det(AX), D'(X) = det(A)det(X).$$

Es fácil ver (para D' es claro porque es un múltiplo de det, para D hay que mirar más fino) que D y D', pensadas como funciones en las columnas, son formas multilineales alternadas. Además ambas coinciden en I_n (valen $det(A)$). Por la proposición 1.3, se deduce que $D = D'$, es decir $det(AX) = det(A)det(X), \forall X$. □

Teorema 1. *A es invertible si y sólo si $det(A) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos A invertible. Entonces existe B tal que $AB = I_n$. Aplicando el determinante y la Proposición anterior, se tiene $det(AB) = det(I_n)$ y por lo tanto $det(A)det(B) = 1$. Se deduce $det(A) \neq 0$.

Recíprocamente, si $det(A) \neq 0$, se tiene que el rango de A es n (puesto que si no A tendría una fila que es combinación lineal de las restantes y su determinante sería nulo). Se tiene entonces que $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva y por lo tanto L_A es un isomorfismo. Se deduce que A es invertible. □

Proposición 5.2. *Si $det(A) \neq 0$, entonces la inversa de A es la matriz*

$$adj(A) = ((b_{ij}))^t_{i,j \leq n}$$

siendo cada b_{ij} definido como

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij}).$$

Donde M_{ij} es la matriz que se obtiene retirando de A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

Demostración. La idea es probar que $Aadj(A) = det(A)I_n$. Observar que esto implica que A es invergile.

Poniendo $A.adj(A) = (c_{ij})_{i,j \leq n}$

- Verificar que $c_{ij} = \sum_k (-1)^{j+k} a_{ik} det(M_{jk})$
- Probar que $c_{ii} = det(A)$ usando el desarrollo de $\det(A)$ por la fila i-ésima.
- Para probar que $c_{ij} = 0$ si $i \neq j$ utilizar una matriz auxiliar $\widehat{A}$ que es igual que A pero que la fila j se sustituye por la fila i. Desarrollar $\det(\widehat{A})$ por la fila j.

□

Para terminar, observar que de la prueba de la proposición anterior salen dos cosas:

Observación 5.3. *Si A es invertible, se tiene que: $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$ y $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.*