Actividad 10: Rango. Determinantes

Rango

1. **Generalidades sobre rango**(en clase)
   Se define el **rango por columnas** de una matriz A como la cantidad máxima $r_c(A)$ de columnas linealmente independientes en A.

   a) Calcular el rango de las matrices subyacentes de los sistemas de 3 variables del Ejercicio 2 de la Actividad 1 (de la parte de 3 variables).

   b) Considerar además las matrices ampliadas de los mismos sistemas (la matriz ampliada se obtiene agregando la columna de los términos independientes a la matriz subyacente).

   c) Probar que si A es la matriz asociada a cierta transformación lineal T en ciertas bases, entonces $r_c(A) = dimIm(T)$.

   d) Sea A una matriz de tamaño $n \times m$. Probar que su rango por columnas es menor o igual que n y que m.

   e) Se define análogamente el **rango por filas** de una matriz A como la cantidad máxima $r_f(A)$ de filas linealmente independientes en A. Calcularlo para todas las matrices anteriores.

   f) Verificar que en cada caso se tiene $r_c(A) = r_f(A)$.

   g) La propiedad anterior es cierta en general, lo probaremos más adelante. Por ahora vamos a usar el resultado y por lo tanto podremos hablar de **rango de** A sin especificar si es por filas o por columnas. Lo notaremos $r(A)$.

   h) Demostrar que una matriz en $M_n(\Bbbk)$ es invertible si y sólo si tiene rango n.

   i) Dado un sistema de ecuaciones de la forma $AX = b$ con A de tamaño $n \times m$ (observar que el sistema tiene n ecuaciones y m incógnitas). Demostrar los siguientes resultados, que se conocen como Teorema de Rouché-Frobenius.

      1) el sistema es compatible si y sólo si $r(A) = r(A|b)$,
      2) en el caso en que el sistema sea compatible, se tiene lo siguiente:
         a' si $r(A) = m$, la solución es única
         b' si $r(A) < m$, hay infinitas soluciones
      3) el sistema es incompatible si y sólo si $r(A|b) = r(A) + 1$.

   j) A partir de las partes a) y b), deducir usando el Teorema de Rouché-Frobenius, cuántas soluciones tiene cada sistema.

2. Determine el rango de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Hallar el rango de las siguientes matrices, discutiendo según a.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 3a-1 & a^2-a-4 \\ a & a^2 & a^2-2a-1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & a \\ 1 & a-3 & a-3 \\ 1 & 1 & a^2-15 \end{pmatrix}.$$

4. **Matrices de rango 1**

   a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $B \in \mathcal{M}_{1\times n}$. Probar que o bien AB es nula o bien tiene rango es 1.

   b) Probar que si $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es de rango 1 entonces existen $A \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y $B \in \mathcal{M}_{1\times n}$. tales que $AB = M$.

   c) Probar que si $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tiene rango 1 entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M^2 = \lambda M$.

   d) Hallar qué condición debe cumplir el valor λ para que $M + Id$ sea invertible para cualquier M como en la parte anterior.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar en cada caso:

   a) rango$(A) \leq m$

   b) rango$(A) \leq n$

   c) rango$(A) = \text{mín}\{m, n\}$

   d) El sistema $AX = b$ es compatible determinado si y solo si rango$(A) = n$.

   e) Si rango$(A) < n$ el sistema $AX = b$ es incompatible.

   f) Si rango$(A) =$ rango$(A|b)$ entonces el sistema es compatible.

   g) El sistema $AX = b$ es compatible indeterminado si y solo si rango$(A) =$ rango$(A|b) < n$.

   h) Si el sistema de ecuaciones $AX = b$ tiene una única solución, entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ también tiene una única solución.

   i) Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ con $m > n$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene infinitas soluciones.

   j) Si una matriz A de 2×2 satisface que

   $$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   entonces existe $b \in \mathcal{M}_{2\times 1}$ para los cuales el sistema $AX = b$ no tiene solución.

   k) Sean A, B matrices 3×3 tales que

   $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

   entonces rango$(A + B)$ es menor a 3.

l) Si A es una matriz cuadrada de 2×2 invertible, entonces la matriz $B = A + 2Id$ (donde I es la matriz identidad de 2×2) también es invertible.

6. Sean A y $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que P es invertible. Probar que el rango de A es igual al rango de PA.

Determinante

7. Completar las notas sobre determinantes, de acuerdo a lo que vimos en clase.
En particular, demostrar que si $det(A) \neq 0$, entonces la matriz A es invertible, como se sugiere en las notas (esta parte no fue hecha en clase).

8. *a*) Probar que si dos matrices son semejantes entonces tienen el mismo determinante (ver la definición de **matrices semejantes** en el último ejercicio de la actividad 9).

   b) Deducir que si $T : V \to V$ es lineal, entonces $det_B[T]_B$ no depende de la base B de V elegida. A ese número le llamamos **determinante de la transformación** T y lo notamos $det(T)$.

9. (a) Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se dice *nilpotente* si para algún entero positivo k, $A^k = 0$, donde 0 es la matriz nula. Hallar el determinante de una matriz nilpotente.

   (b) ¿Cuánto vale el determinante de una matriz antisimétrica $(2k + 1) \times (2k + 1)$?

   (c) Una matriz $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice *ortogonal* si $QQ^t = I$. Probar que si Q es ortogonal entonces $det(Q) = \pm 1$.

   (d) Hallar el determinante de una proyección $p : V \to V$.

10. Sea $M \in M_{n\times n}$ de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada, I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula. Probar que $\det(M) = \det(A)$.

11. Considerar una matriz triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   a) Probar que $det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

   b) Deducir que es invertible si y sólo si $\lambda_i \neq 0, \forall i$.

   c) ¿Qué forma tendrá su inversa?

   Observar y justificar que valen resultados similares para matrices triangulares superiores.

12. Para $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\overline{A}$ es la matriz dada por $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$ para todo i, j, donde $\overline{z}$ es el conjugado de z.

   (a) Probar que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

   (b) Una matriz $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se dice *unitaria* si $QQ^* = I$, donde $Q^* = \overline{Q^t}$. Probar que si Q es unitaria entonces $\mid \det(Q) \mid = 1$.

13. Si $c_0, \dots, c_n$ son elementos distintos de $\mathbb{R}$, definimos $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $T(f) = \big(f(c_0), \dots, f(c_n)\big)$. Sea $\mathcal{C}_1$ la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$ y $\mathcal{C}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

    (a) Probar que $M =_{C_2} [T]_{C_1}$ es de la forma:

    $$\begin{pmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$$

    Una matriz que tiene esta forma se llama *matriz de Vandermonde.*

    (b) Probar que $\det(M) \neq 0$.

    (c) Probar que $\det(M) = \Pi_{0 \leq i < j \leq n}(c_j - c_i)$.

14. Sea $A \in M_{n \times n}$ dada por

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

    Hallar el determinante de $A + t\,\mathrm{Id}$.

15. Calcular

    $$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

16. ¿Para qué valores de a la siguiente matriz es invertible?

    $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ a+1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

    Calcular la inversa en los casos en que exista.