Ruta del curso.

Este es un curso introductorio a nivel avanzado de la Licenciatura en Matemática, en ecuaciones en derivadas parciales y transformada de Fourier. El curso se divide en dos partes con características diferentes. La primera es sobre las ecuaciones clásicas de EDP, a saber, la ecuación de Laplace, la ecuación del Calor y la ecuación de Ondas, en su versiones homogénea y no homogénea, y como un problema de Dirchlet (para la ecuación de Laplace), o de Cauchy (para la ecuación del Calor o de Ondas). Estas ecuaciones se han estudiado por más de doscientos años (debido a sus aplicaciones a la física y otras ciencias) y se tiene un cabal y explícito conocimiento de ellas. Además del interés en si mismas por sus vastas aplicaciones, su estudio detallado es relevante ya que una buena parte de la teoría moderna de las ecuaciones en derivadas parciales se origina en preguntas surgidas de dicho estudio: ¿hay existencia y unicidad del problema de Dirichlet en un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$?, ¿cuál es la técnica natural para demostrar existencia?, ¿las funciones armónicas (i.e. soluciones de la ecuación de Laplace) son C^∞?, ¿son analíticas? ¿qué espacio de funciones es el natural para probar existencia y unicidad? ¿porqué y para qué se introdujeron los espacios de Sobolev?...

La segunda parte del curso hace un tratamiento moderno a las ecuaciones elípticas de segundo orden lineales, homogéneas o no. La ecuación de Laplace o de Poisson son ejemplos de ellas. Se introducen los espacios de Sobolev y su caracterización en el espacio de Fourier y sus propiedades básicas. Luego se define solución débil al problema de Dirichlet con condición de borde cero (que traspasa el problema a uno en análisis funcional) para posteriormente avanzar en el problema de existencia y unicidad de dichas soluciones. Se prueba en particular el teorema de Lax-Milgram, la Alternativa de Fredholm y otros teoremas más refinados. Finalmente se demuestra lo que se denomina regularidad interior de las soluciones débiles (también se prueban las estimaciones elípticas) de lo cual se deduce en última instancia la existencia y unicidad (o no) de soluciones fuertes al problema original.

Debajo se detalla el temario cubierto. No todo el temario va a ser examinado pero es bueno y saludable tener un conocimiento general de todos los tópicos. Los temas y teoremas indicados en rojo son los que pueden preguntarse en el oral.

I. Primera parte.

1. Introducción. Definición y ejemplos de EDP (P. 1-12).

2. Ecuación de Laplace (P. 20-43). Definición de ecuación de Laplace y solución fuerte. Solución fundamental y fórmula explícita en cada dimensión. Ecuación de Laplace no homogénea (Ec. de Poisson) en $\mathbb{R}^n$, Teorema 1. Fórmula del valor medio para la ecuación de Laplace, Teorema 2. Principio del máximo, Teorema 4, 5. Regularidad, Teorema 6. Estimaciones locales, Teorema 7. Teorema de Liouvile, Teorema 8. Analiticidad, Teorema 10. Desigualdad de Harnack, Teorema 11. Funciones de Green, definición y fórmula de representación para la resolución del problema de Dirichlet no homogéneo, Teorema 12. Energía y unicidad.

3. Ecuación del calor (P. 44-65). Definición de la ecuación del calor y solución fuerte.

Solución fundamental y fórmula en cada dimensión. Problema de Cauchy, Teorema 1. La ecuación del calor no homogénea y el principio de Duhamel, Teorema 2. Fórmula del valor medio, Teorema 3 (solamente el enunciado). Principio del máximo y unicidad, Teorema 4, 5. Principio del máximo y unicidad para el problema de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, Teorema 6, 7. Energía y unicidad hacia el pasado, Teorema 11.

4. Ecuación de Ondas. Definición de ecuación de Ondas y solución fuerte. Dimensión espacial $n = 1$, fórmula de D'Alambert, Teorema 1. Método de reflección, Lemma 1. Fórmulas de Kirchoff y de Poisson para $n = 3, 2$ respectivamente. Energía, unicidad y dominio de dependencia, Teorema 5, 6.

En cada caso anterior, una solución fuerte es una solución C^2 y que verifica la ecuación punto a punto.

II. Segunda parte.

1. Tansformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$ (P. 187-192). Definición. Teorema 1 (Plancherel). Teorema 2. Aplicaciones.

2. Espacios de Sobolev (P. 255-259). Definición de derivada débil. Lemma de unicidad. Definición de espacio de Sobolev $H^k(U)$ y su norma (P. 259). Definición de $H_0^k(U)$.

   [*Comentarios*. La prueba de que $H^k(U)$ es un espacio de Hilbert (con producto interno y completo) está en el Teorem 2 de la página 262. No va. Que $C_c^\infty(U)$ es denso en $H^k(U)$ se encuentra en el capítulo 5.3 en la página 264. Esta propiedad la discutimos pero no la probamos. No va.]

3. Espacios de Sobolev y transformada de Fourier (P. 297-298). Teorema 8. Definición de norma de Sobolev en el espacio de Fourier.

4. Ecuaciones elípticas de segundo orden lineales:

$$Lu = f, \tag{1}$$

   donde,

$$Lu = -\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{2}$$

   es L elíptico, esto es, existe una constante $\theta > 0$ (la constante de elipticidad) tal que, para todo vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos,

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2. \tag{3}$$

   para todo $x \in \overline{U}$ donde $\overline{U}$ es la clausura del dominio U donde está planteado el problema elíptico.

   Ejemplos. $Lu = -\Delta u$. $Lu = -(1 + |x|^2)\Delta u$. $Lu = e^{-(x_1^2+x_2^2)}(4\partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_1x_2}^2 u + 4\partial_{x_2}^2 u) + x_1^4 u$, con $x = (x_1, x_2) \in B(0, 1) =: U$.

[*Comentarios.* Esta sección del curso ilustra con una clase particular de EDP las técnicas modernas de estudio y el tipo de resultados que se pueden obtener. En general las ecuaciones elípticas pueden ser lineales o no, y de segundo orden o no (pueden ser de orden $1, 2, 3, 4, \ldots$). Por ejemplo,

$$(1 + u^2)\Delta\Delta u = 1 + u^4, \tag{4}$$

es una ecuación elíptica no-lineal, de orden cuatro (debido al término $\Delta\Delta u$) que tiene sentido en cualquier abierto U de $\mathbb{R}^n$. En todo caso, el estudio que vamos a hacer de la mucho más simple ecuación (1) tiene gran generalidad y permite extensiones a situaciones diferentes (dentro del mundo elíptico).

Para simplificar el tratamiento (y no distraernos en tecnicismos) asumiremos lo siguiente: El dominio $\overline{U}$, (U abierto), es compacto. Además ∂U es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$ C^∞. Esta última propiedad se usa solamente al estudiar la regularidad de las soluciones débiles en ∂U. Las funciones a_{ij}, b_i, c y f se asumen $C^\infty(\overline{U})$ [(1)]. En particular están acotadas en $\overline{U}$. La ecuación (1) se va a resolver con la condición de borde de Dirichet $u|_{\partial U} = 0$. Es decir, el problema es,

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u|_{\partial U} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Aquí debemos hacer una digresión. La condición de borde $u|_{\partial U} = 0$, tiene sentido si por solución entendemos una solución fuerte, $C^\infty(\overline{U})$ en este caso, y por lo tanto continua. Una solución fuerte satisface la ecuación (5) punto a punto, donde las derivadas de u dentro de Lu son las derivadas ordinarias. Si en vez por solución entendemos una función en $H^2(\overline{U})$, (y por tanto las derivadas que se usan de u son derivadas débiles y (5) vale c.t.p), tenemos un problema con la condición de borde ya que como ∂U es un conjunto de medida nula, da igual que valor le asignemos a u en allí, que seguirá representando a la misma función de $H^2(\overline{U})$. Buscar soluciones en H^2 puede parecer caprichoso ya que al asumir que a_{ij}, b_i, c y f son C^∞, la regularidad natural que uno espera para una solución es C^∞. Podría parece que es natural pensar en soluciones en H^2 solamente cuando $f \in L^2(U)$ y no se conozca que f sea más regular. Aún así la ruta para encontrar soluciones C^∞ es encontrando primero soluciones en H^2 y luego estudiando en detalle la regularidad, para probar que de hecho son C^∞ y por lo tanto son soluciones fuertes.

Para estudiar la existencia y unicidad de soluciones en el espacio de Sobolev H^2, se buscan primero lo que se llaman "soluciones débiles" en H^1. ¿Porqué la denominación "débil"?: si u está en H^1 la derivada segunda de u no tiene porqué existir, ni siquiera en un sentido débil y por tanto Lu puede no tener significado. Por tanto si $u \in H^1$ ha de ser "solución", entonces debe ser en un sentido distinto a (5). Para definir solución débil se reemplazan ambas ecuaciones de (5) por el siguiente par de ecuaciones débiles:

$$\begin{cases} B(u, v) = \langle f, v\rangle_{L^2(U)}, \quad \forall v \in H^1_0(U), \\ u \in H^1_0(U) \end{cases} \tag{6}$$

donde H^1_0 es la clausura en $H^1(U)$ del conjunto de las funciones C^∞ de soporte compacto en U. Esta condición interpreta la condición $u|_{\partial U} = 0$ (que como comentamos no tiene particularmente sentido cuando $u \in H^1$). Por otro lado $B(u, v)$ es el funcional bilineal $B : H^1_0(U) \times H^1_0(U) \to \mathbb{R}$ que resulta de operar formalmente multiplicando $Lu = f$ por

[(1)] Tener en cuenta que $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ es C^∞ sii existe un abierto V que contiene a $\overline{U}$ y una función $g : V \to \mathbb{R}$ C^∞ tal que $h = g$ en $\overline{U}$.

v e integrando por partes (formalmente porque Lu puede no tener sentido), resultando,

$$B(u,v) = \int_U \left[\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i}^{n} b_i'(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(x)uv \right] dx. \tag{7}$$

Una vez planteado el problema débil (6) se prueba la existencia de soluciones débiles en $H_0^1(U)$ usando técnicas de análisis funcional en espacios de Hilbert, y finalmente se demuestra, estudiando la regularidad, que dichas soluciones están en H^2, por tanto son continuas en U (esto se prueba con un encaje de Sobolev) y que en el borde de U valen cero, justificando así la condición de borde original $u|_{\partial U} = 0$ sin ambigüedad. Ese es el camino que vamos a seguir, excepto que no probaremos la regularidad en el borde (es decir que u no solo es continua en U sino en $\overline{U}$ y que $u|_{\partial U} = 0$).

Para probar existencia de soluciones fuertes $C^\infty(\overline{U})$ se debe estudiar la regularidad de orden superior de la solución débil. Esto último solo lo vamos a comentar. En suma, solo probaremos la existencia de una solución en $H_0^1(U)$ que se demostrará que está en $H^2_{loc}(U)$, ($H^2_{loc}(U)$ son las funciones en U tal que para todo abierto $V \subset\subset U$, $u \in H^2(V)$). Regularidad superior (esto es, probar que está en $H^k_{loc}(U)$ para todo $k \geq 2$) así como regularidad en el borde serán solamente discutidas.]

El temario está contenido en las siguientes páginas.

(P 311-324). Definición de ecuación lineal elíptica de segundo orden. Definición de solución débil al problema de Dirichlet. Teorema de Lax-Milgram Teorema 1. Estimaciones de energía, Teorema 2. Primer teorema de existencia de soluciones, Teorema 3. La alternativa de Fredholm (esto es un nombre para cierta técnica que en este caso termina en un teorema), segundo teorema de existencia, Teorema 4. Tercer teorema de existencia, Teorema 5 (en particular existencia de funciones propias, $Lu = \lambda u$). Teorema 6.

(P. 326-331). Regularidad interior (en U), Teorema 1. Consecuencias (sin prueba).

Comentarios sobre el estudio de la regularidad en el borde y la existencia de soluciones fuertes al problema de Dirichlet.

Los teoremas de existencia de soluciones débiles requieren probar la desigualdad de Poincaré (que se deduce de de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (P. 276-280), Teorema 1, Teorema 3). También requieren del teorema de Rellich-Kondrachov (P. 286-289), Teorema 1. Poincaré y Rellich-Kondrachov se discutieron pero no se probaron.

El teorema de regularidad interior necesita de teoremas sobre cocientes incrementales (que sí lo vimos) de las páginas 292-293, Teorema 3.