Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Prueba 2. Espacios vectoriales abstractos

1. En cada caso, averiguar si S es un subespacio de V. Justificar la respuesta.

   i) $V = \mathbb{k}^4$ $S = \{(x, y, z, t) \in V \mid x^2 = y\}$,

   ii) $V = \mathbb{k}[t]$, $S = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$.

   Caso (i)
   Hay una sutileza para la parte (i) que es asumir que en $\mathbb{k}$ se tiene $2 \neq 0$. Esta suposición vale en los cuerpos que conocemos (comentamos algo en clase al respecto). Podemos pensar todo el curso con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y eso, además de darnos claridad, nos evita este tipo de consideraciones.

   No es un subespacio puesto que si tomamos $v = (1, 1, 0, 0) \in \mathbb{k}^4$, se tiene $v \in S$ porque $1^2 = 1$ pero $-v = (-1, -1, 0, 0) \notin S$ puesto que $(-1)^2 = 1 \neq 1$.

   Caso (ii) Síes subespacio. Claramente no es vacío porque el polinomio nulo evaluado en 5 da 0. Si tengo dos polinomios $p, q \in S$, verifican $p(5) = q(5) = 0$, entonces $(\lambda p+q)(5) = \lambda p(5)+q(5) = \lambda\cdot 0+0 = 0$, por lo que $\lambda p + q \in S$.

2. Se considera el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{k})$ y la transformación lineal $T : V \to \mathbb{k}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + c, a + b)$.

   a) Hallar $N(T)$.

   b) Averiguar si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

   c) Hallar un complemento directo de $N(T)$.

   d) Calcular la matriz asociada a T en las bases canónicas correspondientes.

   El núcleo de la transformación es el conjunto

   $$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, b = c = -a\right\}$$

   La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no nula y está en el núcleo, por lo que T no es inyectiva.

   Por otro lado $dimN(T) = 2$ puesto que $B = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $N(T)$. Usando el teorema de las dimensiones, se tiene que $dim(Im(T)) = 4 - 2 = 2$ y como $Im(T) \subseteq \mathbb{k}^2$ se tiene que $Im)(T) = \mathbb{k}^2$, por lo que T es sobreyectiva.

Extendamos la base de $N(T)$ a una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{k})$ para obtener un complemento directo. Por ejemplo $B \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{k})$ (sale verificando que es li, puesto que son 4 elementos en un espacio de dimensión 4). Se deduce que el subespacio generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un complemento directo. Explícitamente, se trata del conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Para terminar este ejercicio, tomemos las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{k})$ y de $\mathbb{k}^2$ respectivamente, en el siguiente orden $C = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}, \mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$. Se tiene

$$T(E_{11}) = (1,1), T(E_{12}) = (0,1), T(E_{21}) = (1,0), T(E_{22}) = (0,0).$$

Se deduce que la matriz asociada a T entre las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ un subconjunto de V, y consideremos un elemento $v \in V$ tal que $\{v, x_1, x_2\}$ es linealmente independiente. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   (i) $v \in \langle X \rangle$,

   (ii) existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{k}$ tales que $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ y existe algún $i \geq 3$, tal que $\alpha_i \neq 0$.

   La implicancia (ii) implica (i) es trivial, puesto que v es combinación lineal de elementos de X. Probemos (ii) implica (i): como $v \in \langle X \rangle$ se tiene que v es combinación lineal de los elementos de X, esto es, existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tales que $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. Supongamos por el absurdo que $\alpha_i = 0, \forall i \geq 3$. Entonces $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ y por tanto $-1.v + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$, contradiciendo que $\{v, x_1, x_2\}$ es linealmente independiente (puesto que $-1 \neq 0$).