Probabilidad 2020 **Centro de Matemática** **Práctico 6**

Esperanza y varianza

1. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a, b). Hallar $\mathbf{E}X$, $\mathbf{var}X$ y $\mathbf{E}(X^3)$.

2. Sea X una variable aleatoria con distribución discreta, que toma, con probabilidad $1/n$, cada uno de los valores $1, 2, \dots, n$. Calcular $\mathbf{var}X$.

3. Sea X una variable aleatoria con distribución normal con parámetros $(0, 1)$. Calcular $\mathbf{E}(X^k)$ para $k \geq 3$ y la función generatriz de momentos.

4. Consideremos una variable aleatoria X con distribución exponencial, con parámetro $\alpha > 0$. Calcular $\mathbf{E}X$, $\mathbf{var}X$ y $\mathbf{E}(X^3)$.

5. Sea X una variable aleatoria que toma únicamente valores enteros no negativos. Demostrar que $\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$.

6. Sea X una variable aleatoria arbitraria. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n) \leq \mathbf{E}|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

7. Sea X una variable aleatoria para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria cumple que $\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

8. Sea X una variable aleatoria no negativa para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que $\mathbf{E}X = \int_0^{\infty}(1 - F(x))dx$, donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

9. Sea X una variable aleatoria para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que

$$\mathbf{E}X = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx,$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

10. Sea X una variable aleatoria. Demostrar que si $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ para algún $r > 0$, entonces

$$\mathbf{E}|X|^r = r\int_0^\infty \mathbf{P}(|X| \geq x)x^{r-1}dx.$$

11. La variable aleatoria X tiene *distribución de Laplace*, si su densidad es

$$p(x) = \frac{1}{2b}e^{-|x-a|/b},$$

donde $b > 0$ y a son constantes. Hallar $\mathbf{E}X$ y $\mathbf{var}X$.

12. La densidad de la magnitud de la velocidad absoluta de una molécula tiene la forma

$$p(x) = \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\alpha^2}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$ (*distribución de Maxwell*). Hallar la velocidad media de una molécula y su varianza.

13. Consideremos una variable aleatoria X con distribución normal con parámetros (a, σ). Demostrar que la variable aleatoria $Y = e^X$ tiene densidad dada por

$$p(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln y - a)^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$ (la distribución con esta densidad se denomina *lognormal*). Hallar $\mathbf{E}Y$ y $\mathbf{var}Y$ en el caso $a = 0$, $\sigma = 1$.

14. *El problema de tomar de más.* Una persona quiere abrir una puerta, y tiene n llaves de las cuales solo una corresponde a la cerradura. La persona va eligiendo las llaves al azar y probando abrir la puerta. Calcular la esperanza matemática y la varianza del número de intentos en cada uno de los dos siguientes casos: (a) la persona elige una llave nueva cada vez (la persona tomó pero no tanto), (b) la persona elige cada vez entre las n llaves (tomó en serio).

15. Sea $f(x)$ una función definida en la recta real, no negativa y no decreciente, y sea X una variable aleatoria tal que existe $\mathbf{E}f(X)$. Demostrar la desigualdad $\mathbf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{f(x)}\mathbf{E}f(X)$ para todo x real.

16. Construir la densidad de una distribución de una variable aleatoria X tal que $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, y $\mathbf{E}|X|^3 = \infty$.

17. Construir la densidad de una distribución de una variable aleatoria X tal que:
(a) $\mathbf{E}|X|^3 = \infty$, y $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ para cualquier δ positivo, $\delta < 1$;
(b) $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} = \infty$, y $\mathbf{E}(X^2) < \infty$ para cualquier $\delta > 0$.

18. Calcular la mediana de una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha = 1$.

19. Consideremos una variable aleatoria X con función de distribución X dada por

$$F(x) = 1 - e^{-x^b/c}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$, donde b y c son constantes positivas (*distribución de Weibull*). Hallar la mediana y los cuantiles de orden q de la variable aleatoria X.

20. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y), & \text{si } 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{E}X$ y $\mathbf{E}Y$.