Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática
Primer semestre de 2017

Prueba Globalizadora

1. *a*) Probar la *identidad de Lagrange*:

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

   b) Deducir que si u y v son perpendiculares, el volumen del paralelipípedo determinado por los vectores u, v y $u \wedge v$ es $\|u\|^2\|v\|^2$.

2. Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva:

   a) Probar que existe una transformación lineal $S : W \to V$ tal que $S \circ T = id_V$.

   b) Dar un ejemplo que pruebe que una tal S no es única.

   c) Probar que si S verifica (a) es sobreyectiva y que $Im(T) \oplus N(S) = W$.

   d) Probar que si U es un subespacio de W tal que $Im(T) \oplus U = W$ existe una única $S : W \to V$ tal que $S \circ T = id_V$ y $N(S) = U$.

   e) Consideremos el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 0, 2, 0)$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(a + bx + cx^2) = (a, b + c, -a, b)$.

      (i) Probar que T es inyectiva y no sobreyectiva.

      (ii) Probar que $Im(T) \bigoplus U = \mathbb{R}^4$.

      (iii) Dar la expresión general de $S(x, y, z, t)$ para S correspondiente a U según $2d$).

3. *a*) Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Probar que si $\{b_1, b_2, \cdots , b_r\}$ es base de $Fil(A)$, entonces $\{[b_1], [b_2], \cdots , [b_r]\}$ es base de $\frac{\mathbb{R}^m}{N(L_A)}$.

   b) Consideremos la matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

      (i) Calcular su rango.

      (ii) Determinar geométricamente la imagen de L_A.

      (iii) Dar una base de $\frac{\mathbb{R}^4}{N(L_A)}$.