Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática

Examen de agosto (28/7/2017)

1. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 3z, 2x - 4y + z, x)$$

.

   a) Para $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz asociada a T de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.
   b) Probar que $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   c) Hallar $_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.
   d) Recordamos que un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ se dice T-*invariante* si $T(S) \subseteq S$. Probar que existe un plano por el origen π tal que π es T-invariante y $T_\pi : \pi \to \pi$ es un isomorfismo.

2. Decimos que una tranformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría si $\|T(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^3$.

   a) Probar que toda isometría es inyectiva.
   b) Probar que una transformación lineal es una isometría si y sólo si $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^3$.
   c) Probar que si T es una isometría y u, v son vectores no nulos, entonces $T(u) \wedge T(v)$ y $T(u \wedge v)$ son vectores paralelos con la misma norma $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$, pero que no son necesariamente iguales.
   d) Expresar analíticamente
      1) el área de un paralelogramo determinado por dos vectores u, v no nulos,
      2) el volumen de un paralelipípedo determinado por vectores u, v, w.
   e) Probar que toda isometría preserva estas dos magnitudes.

3. Se considera un espacio vectorial V de dimensión finita que contiene dos subespacios no nulos W_1, W_2 tales que $V = W_1 \oplus W_2$.

   a) Probar que V tiene dimensión mayor o igual a 2.
   b) Probar que $(V/W_1)^*$ y W_2 tienen la misma dimensión.
   c) Consideremos un espacio vectorial U y transformaciones lineales $T_i : W_i \to U$. Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to U$ tal que $T_{|W_i} = T_i$.

Nota: las partes a) y b) del ejercicio 1 son eliminatorias. El estudiante que no tenga esto esencialmente resuelto no aprobará el examen.

1. a) ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que los vectores en cuestión son li y como son 3, son base de $\mathbb{R}^3$.

   c) Evaluemos T en cada uno de los elementos de B:

$$\begin{array}{l} T(1,0,-1) = (1,0,3) = -1\dot{(}1,0,-1) + 2\dot{(}1,0,1) \\ T(1,0,1) = (3,0,3) = 3\dot{(}1,0,1) \\ T(1,1,1) = (5,4,2) = \frac{3}{2}\dot{(}1,0,-1) - \frac{1}{2}\dot{(}1,0,1) + \frac{4}{3}\dot{(}1,1,1). \end{array},$$

   Por lo tanto,

$${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

   d) Se ve en esta última matriz asociada que el subespacio generado por $---$ es T-invariante de dimensión 2. Dicho subespacio es un plano π que pasa por el origen. Además $T_\pi : \pi \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, puesto que lleva la base $\{(1,0,-1),(1,0,1)\}$ en un conjunto linealmente independiente, se deduce que su núcleo tiene dimensión 0 y por lo tanto su imagen tiene dimensión 2 (por el Teorema de las Dimensiones). Como sabemos que $Im(T_\pi) \subseteq \pi$, deducimos que $Im(T_\pi) = \pi$ y por tanto $T_\pi : \pi \to \pi$ es un isomorfismo.

2. a) Recordemos que $\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle$.
   Si T es una isometría, entonces $\langle T(u-v), T(u-v)\rangle = \langle u, v\rangle$ y por la propiedad de isometría y la linealidad de T y del producto escalar y la conmutatividad del producto escalar se tiene:

$$-2\langle T(u), T(v)\ rangle = -2\langle u, v\rangle,$$

   igualdad que multiplicada por $\frac{-1}{2}$ da lo que queremos demostrar.
   El recíproco sale de tomar $u = v$ en la igualdad de hipótesis y luego tomar raíz cuadrada.

   b) Por definición, toda isometría preserva normas. Por la parte a), toda isometría preserva además ángulos (alcanza con tomar vectores de norma 1 en la igualdad $\langle T(u), T(v)\ rangle = \langle u, v\rangle$).

   c) Como T es inyectiva, se tiene que $T(u)$ y $T(v)$ son no nulos. Sea α el ángulo que forman (que coincide con el ángulo que forman u y v, claramente no nulos también). Por definición de producto vectorial, $T(u) \wedge T(v)$ es un vector perpendicular a $T(u)$ y $T(v)$. Además, como $u \wedge v$ es perpendicular a u y v y T preserva ángulos, $T(u \wedge v)$ es perpendicular a $T(u)$ y a $T(v)$. Se deduce que $T(u \wedge v)$ y $T(u) \wedge T(v)$ son paralelos. Además, $\|T(u)\|\|T(v)\|\|sen(\alpha)\| = \|u\|\|v\|\|sen(\alpha)\| = \|u \wedge v\| = \|T(u \wedge v)\|$.
   Definamos $T(x,y,z) =)(x,y,-z)$. Es claro que T es una isometría. Ahora bien, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene $T(e_1 \wedge e_2) = T(e_3) = -e_3$ pero $T(e_1) \wedge T(e_2) = e_1 \wedge e_2 = e_3$.

d) Calculemos el área de un paralelogramo determinado por vectores u y v no nulos que forman un ángulo α: tomando como base $\|u\|$ y como altura $\|v\|\|sen(\alpha)\|$ por lo que el área queda $\|u \wedge v\|$.
Por otro lado, sabemos de resultados del curso que el volumen del paralelipípedo es $\|\langle u \wedge v, w\rangle\|$.

e) Como T preserva el producto vectorial, entonces el área del paralelogramo determinado por u y v coincide con el del paralelogramos determinado por $T(u)$ y $T(v)$.
Como T preserva el producto vectorial y el producto escalar, entonces el volumen del paralelipípedo determinado por u, v y w coincide con el volumen del paralelipípedo determinado por $T(u), T(v)$ y $T(w)$.

f)

3. *a*) Como cada W_i tiene dimensión mayor o igual que 1 y la dimensión de V es la suma de las dimensiones de los W_i, se tiene que la dimensión de V es por lo menos 2.

b) Como la dimensión de V/W_1 es $dimV - dimW_1$, resulta que es finita. Por lo tanto, la dimensión de $(V/W_1)^*$ coincide con la de V/W_1. Esta es $dimV - dim(W_1) = dim(W_2)$.

c) Como para cada $v \in V$ existen únicos w_1, w_2 en W_1, W_2 respectivamente, definifmos $T(v) = T_1(w_1) + T_2(w_2)$. Se puede probar fácilmente que T es lineal y que $T_{\,|W_i} = T_i$.
Para probar la unicidad, supongamos que $T, T' : V \to U$ son transformaciones lineales tales que $T'_{|W_i} = T_i = T_{\,|W_i}.(*)$. Entonces para v como arriba, se tiene

$$T'(v) = T'(w_1) + T'(w_2) = T_1(w_1) + T_2(w_2) = T(w_1) + T(w_2) = T(v),$$

donde en la primera y la última igualdad se usó la linealidad de T' y la de T respectivamente, y en las del medio se usaron las igualdades en $(*)$.