Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática

Examen de diciembre (8/12/2017)

1. *a*) Sea $Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Probar que $Y^tY = 0$ si y sólo si $Y = 0$.
   b) Se consideran matrices $A \in M_{n\times m}(\Bbbk), B \in M_{n\times k}(\Bbbk)$.
      1) Se considera la matriz $P = A^tB$. Probar que $rg(P) \leq rg(A)$.
      2) Supongamos ahora $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $B = A$, es decir $P = A^tA$.
         a' Probar que para todo $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ se tiene $PX = 0$ si y sólo si $AX = 0$.
         b' Deducir $rg(A) = rg(P)$.
   c) Hallar una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $rg(A^tA) \neq rg(A)$.

2. Se considera la función $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ definida por
$$T(p) = p' + p(2)t^2$$
   a) Probar que T es lineal.
   b) Hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas.
   c) Probar que T es sobreyectiva.
   d) Hallar una base del núcleo de T.

3. Se considera el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ y los elementos $f_1, f_2, \cdots f_n$ de V^* definidos como sigue:
$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i + x_{i+1}, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$$
   y $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n + x_1$.
   a) Probar que $C = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ es base de V^* si y sólo si n es impar.
   b) Para n impar, explicitar la base de V dual a C.

Solución (8/12/2017)

1. *a*) Es claro que si $Y = 0$ entonces $Y^tY = 0$. Recíprocamente, si $Y = (a_1, \cdots, a_n) \neq 0$, como $Y^tY = a_1^2 + \cdots + a_n^2$, se tiene una suma de cuadrados de números reales igual a 0, por lo que todos ellos son nulos.

   b) 1) El rango de P es la dimensión de la imagen de $L_P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ definida por $L_P(v) = P\dot{v}$, y lo análogo pasa con el rango de A^t respecto a $L_{A^t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Como $P\dot{v} = A^t(A\dot{v})$ se tiene que la imagen de L_P está incluida en la imagen de L_{A^t} y por tanto $rg(P) \leq rg(A^t) = rg(A)$.

   2) Supongamos ahora $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $B = A$, es decir $P = A^tA$.

   a' Es claro que si $AX = 0$ entonces $PX = A^t(AX) = 0$. Para el recíproco, observar que $A^tAX = 0$ implica $(AX)^t(AX) = X^tA^tAX = 0$ lo que implica, por la parte a) de este ejercicio, que $AX = 0$.

   b' Consideremos ahora $L_P, L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y observemos sus núcleos: por la parte anterior, $N(L_P) = N(L_A)$. Se deduce $rg(P) = n - N(L_P) = n - N(L_A) = rg(A)$.

   c) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. *a*) A cargo del estudiante.

   b) Sean $\{1, t, t^2, t^3\}$ y $\{1, t, t^2\}$ las respectivas bases canónicas del dominio y codominio.

   La matriz asociada a T en estas bases es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

   c) El determinante de las tres primeras columnas es 2 (no nulo), por lo que corresponde a vectores l.i. de $Im(T)$. La dimensión de $Im(T)$ es entonces al menos 3 y como el codominio de T tiene dimensión 3, se tiene que $Im(T) = \mathbb{R}_2[t]$.

   d) Por el teorema de las dimensiones, el núcleo de T tiene dimensión 1. Es claro que $T(t^3) = 11T(1)$ por lo que $T(t^3 - 1) = 0$ y $\{t^3 - 1\}$ resulta una base de $N(T)$.

3. *a*) Si n es par, se tiene $f_1 - f_2 + f_3 + \cdots - f_n = 0$ y por tanto el conjunto de funciones es ld.

   Si n es impar, supongamos $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Evaluando en cada e_i se tiene $\alpha_{i-1} + \alpha_i = 0, \forall 2 \leq i \leq n$. Se deduce que todos los α de índice impar son iguales,. Ahora bien, evaluando en e_1 se tiene $\alpha_1 + \alpha_n = 0$ y por tanto $\alpha_n = -\alpha_1$. Como además n es impar, se deduce $\alpha_1 = 0$ y por tanto todos los coeficientes de índice impar son nulos. Los de índice par son opuestos a ellos, y por tanto, también son nulos.

   b) Para n impar, explicitar la base de V dual a C.

La base a considerar es $B = \{c_1, c_2, \cdots c_n\}$ donde

$$c_1 = (1, 0, \cdots, -1), c_2 = (-1, 1, 0, \cdots, 0), \text{ en general } c_i = e_i - e_{i-1} \forall i \geq 2.$$

Se prueba que $f_i(c_j) = \delta_{i,j}, \forall i, j \leq n$. Supongamos que una combinación ideal de los c_j es 0. Aplicando cada f_i a dicha combinación lineal obtenemos ecuaciones como las de la parte a) y usando que n es impar, se tiene que los coeficientes de la combinación lineal son nulos y por tanto el conjunto es l.i. Como tiene n elementos, es base.