Práctico 14

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(ax^2+bx+c) = (5a-b+5c)x^2+(-4a+b-4c)x-6a+b-6c$.

(a) Hallar una base de $N(T)$.
(b) Probar que $N(T) \cap Im(T) = \{0\}$ y deducir que $\mathbb{R}_2[x] = N(T) \oplus Im(T)$.
(c) Sean $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ T(p) = p\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ T(p) = -p\}$.
  (i) Hallar bases de S_1 y S_2.
  (ii) Probar que $\mathbb{R}_2[x] = N(T) \oplus S_1 \oplus S_2$.
(d) Hallar bases de $\mathbb{R}_2[x]/N(T)$ y $\mathbb{R}_2[x]/(N(T) \oplus S_1)$.

2. Se define una relación de equivalencia entre las matrices $n \times n$ de la siguiente manera: $A, B \in \mathcal{M}_n$, $A \sim B$ si y sólo si $A = PBP^{-1}$.

(a) Probar que si $A \sim B$ entonces $det(A) = det(B)$.
(b) Sea $\phi : \mathcal{M}_n/_\sim \to \mathbb{R}[x]$ definida por $\phi([A]) = det(A - xI)$.
  (i) Probar que ϕ está bien definida.
  (ii) Probar que $\phi([A]) = \phi([A^t])$.
(c) Investigar si es posible definir una suma en $\mathcal{M}_n/_\sim$ como sigue $[A] + [B] = [A + B]$.

3. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ fijos. Definimos $\phi_{uv} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $\phi_{uv}(w) = u \wedge v \cdot w$ para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

(a) Probar que $\phi_{uv} \in (\mathbb{R}^3)^*$.
(b) Hallar u y v para que ϕ_{uv} no sea la función nula.
De ahora en adelante se trabaja con u y v fijos tal que ϕ_{uv} no sea la función nula.
(c) Hallar una base de $N(\phi_{uv})$.
(d) Probar que $\{[u \wedge v]\}$ es una base de del espacio cociente $\mathbb{R}^3/N(\phi_{uv})$.

4. Sea V el espacio de las sucesiones reales. Definimos $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ por $\psi(\{x_n\}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

(a) Probar que ψ es lineal.
(b) Hallar $N(\psi)$, $Im(\psi)$.
(c) Investigar si ψ es inyectiva y sobreyectiva.
(d) ¿Qué se puede decir de la dimensión de $W = V/N(\psi)$?
(e) Sean $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ y $z = \{z_n\} \in V$ definidas por $x_n = (-1)^n$, $y_n = 2n$ y $z_n = 2n^2 + 7$. Probar que $\{[x], [y], [z]\}$ es l.d. en W. Escribir explícitamente uno de ellos como combinación lineal de los demás.

5. Se considera $S = \{(x^2 - 1) \cdot q(x) : \ q(x) \in \mathbb{R}_1[x]\}$ subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$.

(a) Probar que $\mathcal{A} = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - x\}$ es base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contiene una base de S.
(b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]/S$.
(c) Sea $\phi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal definida por $\phi(p(x)) = (p(1), p(-1))$. Hallar $M = {}_{\mathcal{C}}[\phi]_{\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{C}$ es base canónica de $\mathbb{R}^2$.
(d) Probar que existe una única $\widehat{\phi} : \mathbb{R}_3[x]/S \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $\widehat{\phi}([p(x)]) = (p(1), p(-1))$.
(e) Si $\pi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]/S$ es la proyección canónica, hallar $N = {}_{\mathcal{B}}[\pi]_{\mathcal{A}}$ y $P = {}_{\mathcal{C}}\left[\widehat{\phi}\right]_{\mathcal{B}}$.
(f) Probar que $\widehat{\phi}$ es un isomorfismo.

(g) Probar que $M = P \cdot N$.

6. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $T : V \to V$ dada por $T(f) = f + f' + f''$.

(a) Hallar la matriz $A = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$, donde $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
(b) Probar que A es invertible.
(c) Expresar $T^{-1}(1)$, $T^{-1}(x)$, $T^{-1}(x^2)$ y $T^{-1}(x^3)$ como combinación lineal de $\mathcal{B}$.
(d) Calcular A^{-1}.

7. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p(1), p'(1))$.

(a) Hallar la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{A} = \{x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
(b) Demostrar que T es un isomorfismo.
(c) Hallar la matriz asociada a $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ en las bases de (a).
(d) Sea $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{c}_{\mathcal{C}}(v) = (3, 2, -2)$. Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(q) = v$.

8. (a) Calcular los rangos de L y M.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sean S y T transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ representadas en las bases canónicas por las matrices L y M respectivamente. Demostrar que $S(\mathbb{R}^3) \neq T(\mathbb{R}^3)$.
(c) Sea V un espacio de dimensión $\geqslant 2$ y sean U y W subespacios tales que $U \neq W$, $\dim U = s$, $\dim W = r$, $\dim U \cap W = i$. Si $\mathcal{B}$ es base de $U \cap W$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ base de U y $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ base de W, demostrar que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es linealmente independiente. Deducir que $i \geqslant r + s - n$.
(d) Usando (a), (b) y (c) probar que $\dim S(\mathbb{R}^3) \cap T(\mathbb{R}^3) = 2$.

9. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$.

(a) Probar que $\mathcal{B} = \{1, x^2 + 1, x^2 + x - 1, x^3\}$ es base de V.
(b) Sea $T : V \to V$ transformación lineal definida por: $T(1) = -x^3 + 1$, $T(x^2 + 1) = 3x^3 + 2x^2 + 5$, $T(x^2 + x - 1) = 2x^3 + 2x^2 + 2x$ y $T(x^3) = x^3 - 1$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ y verificar que $T^2 = 2T$.
(c) Calcular $N(T)$ y hallar un subespacio A de V tal que $V = A \oplus N(T)$ y $T(A) \subset A$.
(d) Hallar una base $\mathcal{D}$ de V de modo que ${}_{\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{D}}$ sea diagonal.