Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Álgebra Lineal I
Licenciatura en Física

Examen - 26 de febrero de 2014

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular la inversa de A.

   (b) Escribir A como producto de matrices elementales.

2. Sea S el conjunto de todas las matrices 3×3 reales con núcleo conteniendo al plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

   (a) Probar que S es un subespacio del espacio de las matrices 3×3 reales.

   (b) Describir el conjunto S y hallar su dimensión.

   (c) Determinar discutiendo según v y w en que casos hay una única matriz A de S que verifica $Av = w$.

3. Se consideran los puntos $A = (a, 0, 0), B = (0, a, 0),\ C = (0, 0, a)$ con $a > 0$.

   (a) Hallar el área del triángulo de vértices A, B, C.

   (b) Hallar todos los puntos D tales que A, B, C, D sean los vértices de un tetraedro regular (pirámide de caras iguales).

   (c) Planteando un determinante calcular los volúmenes de los tetraedros de (b).

   (d) Expresar en función de l el volumen de un tetraedro cuyos lados miden l.

Soluciones

1. Este ejercicio se resuelve por aplicación directa del algoritmo visto en clase.

2. (a) Si A, B son elementos de S y a, b son escalares resulta que $(aA+bB)X = a(AX)+b(BX) = a0 + b0 = 0$ si $X \in \Pi$, esto implica que $aA + bB \in S$ y por lo tanto S es un subespacio del espacio de las matrices 3x3.

   (b) Los vectores $(1, -1, 0)$ y $(1, 0, -1)$ son base de Π por lo cual las matrices en cuestión son las soluciones al sistema lineal de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

   Se obtiene $A = \begin{pmatrix} a & -a & -a \\ b & -b & -b \\ c & -c & -c \end{pmatrix}$.

   De lo anterior surge que la dimensión de S es 3.

   (c) Si $v \in \Pi$ y $w \neq 0$ no existe una tal A, si $v \in \Pi$ y $w = 0$ existen infinitas tales A. Si $v \notin \Pi$ cualquiera sea w existe una única tal A, esto por el resultado que asegura que existe una transformación lineal que lleva los vectores de una base en vectores dados, para el caso se toma una base formada por v y dos vectores de Π.

3. (a) $\frac{1}{2}||(B - A) \times (C - A)|| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

   (b) Los puntos D están en la recta $\lambda(1, 1, 1)$ (esto surge de que el origen equidista de los puntos A, B y C). Además la distancia de D a cualquiera de los puntos A, B, C debe ser $\sqrt{2}a$. Entonces para hallar los punots D basta con resolver la ecuación: $||D - A|| = \sqrt{2}a$, esto nos da por soluciones $\lambda = a$ o $\lambda = -\frac{1}{3}a$; así que los posibles puntos D son (a, a, a) y $(-\frac{1}{3}a, -\frac{1}{3}a, -\frac{1}{3}a)$.

   (c) Los dos volúmenes son iguales, vamos a calcular con $D = (a, a, a)$. El volumen es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralepípedo generado por los vectores $B - A, C - A, D - A$, es decir vol=$\frac{1}{6}|det \begin{pmatrix} -a & -a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} | = \frac{1}{3}a^3$

   (d) En la parte anterior obtuvimos que si los lados del tetraedro regular miden $\sqrt{2}a$ su volumen es $\frac{1}{3}a^3$, entonces si los lados miden l el volumen es $\frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}}l)^3 = \frac{1}{6\sqrt{2}}l^3$.