Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática

Examen de febrero (9/2/2018)

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathcal{C}}T_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Hallar $T(x, y, z)$.
   (b) Hallar la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$.
   (c) Determinar si T es invertible.

2. Sean r una recta y π un plano que se cortan únicamente en el origen y B_r, B_π bases respectivas de ellos como subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   a) Probar que $B_r \cup B_\pi$ es base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal cuyo núcleo es r y tal que $T(v) = v, \forall v \in \pi$. Hallar la matriz asociada a T de la base B en la base B, siendo $B = B_r \cup B_\pi$ ordenada como se prefiera.
   c) Supongamos que el vector $v = (1, 0, 1)$ es paralelo a r y perpendicular a π. Hallar posibles B_r y B_π y calcular $T(x, y, z)$.

3. Sean V un espacio vectorial y $T, S : V \to V$ transformaciones lineales tales que $T \circ S = id_V$. Sea además $R = S \circ T$.
   a) Probar que $Im(T) = V$ y que $Im(R) = Im(S)$.
   b) Probar que $N(S) = \{0\}$ y que $N(R) = N(T)$.
   c) Probar que $R(v) = v, \forall v \in Im(R)$.
   d) Para $V = \mathbb{R}[t]$ y $S(p) = tp$, hallar una posible T y calcular la transformación lineal R correspondiente, su núcleo y su imagen.

1. *a)* $T(x, y, z) = (x + y, -x + z, -y - z)$

   b)

   c) La matriz no es invertible puesto que el determinante de la matriz anterior es 0, ya que tiene una columna de ceros.

2. *a)* Sean $B_r = \{v_r\}$ y $B_\pi = \{v_1, v_2\}$ tales que $v_r \notin \{v_1, v_2\}$ (esto es posible porque la recta no está incluida en el plano). Supongamos que $\{v_r, v_1, v_2\}$ es ld. Como $\{v_1, v_2\}$ no lo es, se tiene que v_r es combinación lineal de v_1 y v_2 y por lo tanto la recta r estaría incluida en π. Se deduce que $\{v_r, v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de cardinal 3.

   b) $T(v_r) = 0, T(v_1) = v_1, T(v_2) = v_2$.

   c)