Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática
Primer semestre de 2012

Examen Julio 2012
16/07/2012

1. Sea $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T(x+1) = (1,2,0), \qquad T(x^2 - x) = (2,1,1), \qquad T(x^2) = (-1,1,-1).$$

   a) Mostrar que T está determinada con las condiciones anterirores.
   b) Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}[x]_2$, es decir $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.
   c) Hallar una base de $N(T)$ y una base de $Im(T)$.
   d) Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0 \text{ y } x - z = 0\}$. ¿Se verifica que $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(T)$?

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica

$$T(u \wedge v) = T(u) \wedge T(v) \quad \forall\, u,\, v \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Probar que o bien T es inyectiva o bien que T es la transformación nula.
   b) Supongamos que T no es la transformación nula y sea $v_i = T(e_i)$ siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Probar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortonormal, es decir, $v_i \perp v_j$ si $i \neq j$ y que $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$.
   c) Hallar T (o la matriz asociada a T en la base canónica) sabiendo que:
      - $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.
      - v_2 pertenece al plano de ecuación $x - y - z = 0$.
      - La tercera componente de v_3 es negativa.

3. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ y $S \subset V$ un subespacio. Se define

$$S^\circ = \{f \in V^* : f(s) = 0 \text{ para todo } s \in S\}$$

   a) Probar que $S^\circ \subset V^*$ es un subespacio.
   b) Probar que $\dim S^\circ = n - \dim S$.
   c) Sea $S = \langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Hallar explícitamente una base de S°.
   d) Probar que si $S, T \subset V$ son subespacios, entonces $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$, y que $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$.
   e) Probar que $S = \{x \in V : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S^\circ\}$.

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática
Primer semestre de 2012

Solución Examen Julio 2012
16/07/2012

1. *a)* Se verifica que $\mathcal{B}' = \{x+1, x^2-x, x^2\}$ es base de $\mathbb{R}[x]_2$ y por lo tanto T está bien definida.

   b) ${}_{\mathcal{B}'}[id]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. y por lo tanto, como ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}'}\,{}_{\mathcal{B}'}[id]_{\mathcal{B}}$, se tiene que ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   c) $\{x^2 - x - \frac{1}{2}\}$ es base $N(T)$ y $\{(1,2,0),(2,1,1)\}$ es base de $Im(T)$.

   d) Si, pues $\{(1,-2,1)\}$ es base de W y $(1,2,0),(2,1,1)$ y $(1,-2,1)$ es L.I.

2. *a)* Supongamos que $N(T) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ y sea $v \in N(T)$ no nulo. Sea u no nulo perpendicular a v y $w = u \wedge v$. Luego $T(w) = T(u) \wedge T(v) = \overrightarrow{0}$, es decir, $w \in N(T)$. Y también $T(v \wedge w) = \overrightarrow{0}$. Como $\{v, w, v \wedge w\}$ es L.I. (y base) concluimos que $N(T) = \mathbb{R}^3$.

   b) Tenemos que $v_3 = v_1 \wedge v_2, v_1 = v_2 \wedge v_3, v_2 = v_3 \wedge v_1$ y de esto se deduce facilmente el resultado.

   c) Como v_2 pertenece al plano $x - y - z = 0$, es perpendicular a v_1 y tiene norma 1 se tienen dos posibilidades: $v_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ y por lo tanto $v_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$. Luego, como v_3 tiene que tener tercera componente negativa concluimos que $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ y $v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$ y por lo tanto la matriz asociada a T en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

3. *a)* Es una verificación sencilla.

   b) Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de S. Lo completamos a una base de V: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$. Sea $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_r^*, v_{r+1}^*, \dots, v_n^*\} \subset V^*$ su base dual. Por lo tanto $v_i^*(v_1) = \cdots = v_i^*(v_r) = 0$ para todo $i = r+1, \dots, n$. Esto implica que $\{v_{r+1}^*, \dots, v_n^*\} \subset S^\circ$.
   El conjunto $\{v_{r+1}^*, \dots, v_n^*\}$ es parte de una base y por lo tanto es linealmente independiente. Basta ver que genera S°, de donde se deduce la tesis.
   Si $g \in S^\circ$, entonces $g = \sum_{i=1}^{n} g(v_i)v_i^*$, y además $g(v_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$, de donde $g \in \langle v_{r+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$.

   c) Extendemos la base de S a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$. La demostración del ítem anterior implica que $\{v_3^*\} \subset S^\circ$ es una base. Describámoslo explícitamente.
   El funcional v_3^* está definido en la base $\mathcal{B}$ como $v_3^*(v_j) = \delta_{ij}$ para $j = 1,2,3$. Expresando un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base $\mathcal{B}$ se deduce que $v_3^*(x,y,z) = x - z$.

d) Se verifica fácilmente que $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.

La inclusión $S^\circ + T^\circ \subset (S \cap T)^\circ$ se verifica inmediatamente. Para ver que son iguales, basta ver que tienen la misma dimensión, y para ello usamos la parte **??** y la igualdad $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$:

$$\begin{aligned}
\dim(S^\circ + T^\circ) &= \dim S^\circ + \dim T^\circ - \dim(S^\circ \cap T^\circ) \\
&= \dim S^\circ + \dim T^\circ - \dim(S+T)^\circ \\
&= (n - \dim S) + (n - \dim T) - (n - \dim(S+T)) \\
&= n - \dim(S \cap T) \\
&= \dim(S \cap T)^\circ
\end{aligned}$$

e) Es claro que $S \subset \{x \in V : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S^\circ\}$. Veamos que $\{x \in V : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S^\circ\} \subset S$.

Supongamos por absurdo que existe $x \in V$ tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in S^\circ$, pero $x \notin S$.

Sea $\{v_1, \dots, v_r\} \subset S$ base de S. Entonces $\{v_1, \dots, v_r, x\}$ es linealmente independiente. Lo completamos a una base de V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, x, v_{r+2}, \dots, v_n\} \subset V$. Sea $\mathcal{B}^* \subset V^*$ la base dual. Entonces $x^*(v_1) = \cdots = x^*(v_r) = 0$, de donde $x^* \in S^\circ$. Se tiene $x^*(x) = 1$, contradiciendo que $f(x) = 0$ para todo $f \in S^\circ$.