Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen de Álgebra lineal 1 - Matemática - 23 de julio de 2013

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & \dots & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & \dots & 1+x_n \end{pmatrix}$ con $x_i \in \mathbb{R}$.

   a) Para $n = 4$ calcular $det(A)$.
   b) Para $n = 4$ determinar el menor rango posible de A.
   c) Obtener y demostrar la expresión general para $det(A)$ en función de $x_1, ..., x_n$.

2. a) Usando una proyección calcular la distancia del punto $(1, -1, 1)$ a la recta generada por el vector $(1, 0, 2)$.
   b) Hallar la matriz (en la base canónica) que corresponde a la rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo π respecto de la recta generada por el vector $(1, 0, 2)$.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y S un subespacio de V. El anulador de S es: $S^\perp = \{f \in V^* : f(s) = 0 \forall s \in S\}$. Si $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V siendo $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de S, consideramos $B^* = \{\phi_1, \dots, \phi_r, \phi_{r+1}, \dots, \phi_n\} \subset V^*$ la base dual de B.

   a) Probar que $\{\phi_{r+1}, \dots, \phi_n\} \subset S^\perp$ y que si $g \in S^\perp$ entonces $g = \sum_{i=1}^{n} g(v_i)\phi_i$.
   b) Probar que $\{\phi_{r+1}, \dots, \phi_n\}$ es una base de $S^\perp$ y deducir que $\dim(S^\perp) = n - \dim(S)$.
   c) Si $S = [(1,1,1),(1,2,1)] \subset \mathbb{R}^3$, hallar una base de $S^\perp$.
   d) Si T es otro subespacio de V tal que $V = S \oplus T$, probar que $V^* = S^\perp \oplus T^\perp$.

ALGEBRA LINEAL 1 - MAT. JULIO 2013.

SOLUCIONES.

Ej 1) a) y c) $\det(A) = 1 + x_1 + \dots + x_n$.

Para calcular, ver que

$$\det\begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 & & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x_{n-1} \\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n \end{pmatrix} = \det \overbrace{\begin{pmatrix} 1+x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & -1 \\ x_n & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A'}$$

Eso se calcula desarrollando x la 1ª columna.

b) Si $1 + x_1 + \dots + x_4 = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ rango $A \leq 3$

Si rango $A < 3 \Rightarrow$ rango $A' < 3$ pero A' Tiene 3 columnas li

Ej 2) a) $P_u(v) = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} u$.

$$P_{(1,0,2)}(1,-1,1) = \frac{3}{5}(1,0,2)$$

$$d\big((1,-1,1), \langle (1,0,2)\rangle\big) = \left\|(1,-1,1) - \frac{3}{5}(1,0,2)\right\| = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

b) T manda
$$\begin{aligned}(1,0,2) &\mapsto (1,0,2) \\ (2,0,-1) &\mapsto (-2,0,1) \\ (0,1,0) &\mapsto (0,-1,0)\end{aligned} \Rightarrow {}_{can}T_{can} = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

EJ 3 | a) Cálculo inmediato + Teórico.

b) Si $g \in S^{\perp} \Rightarrow g(v_i) = 0$ si $i \leq r \Rightarrow g = \sum_{i=r+1}^{n} g(v_i)\phi_i$

c) $S = \{(1,1,1),(1,2,1)\} \Rightarrow \dim S^{\perp} = 1$, alcanza dar un funcional que no sea nulo y se anule en S.

P. ej: $\varphi \,/\, \begin{array}{l} \varphi(1,1,1) = 0 \\ \varphi(1,2,1) = 0 \\ \varphi(1,0,0) = \underline{1} \end{array}$.

d) Sea $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ /

$B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ base de S
$B_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base de T

Tenemos $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ base de V^* como en a)

y $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ es base de T^*
$\{\phi_{r+1}, \dots, \phi_n\}$ es base de S^*.