Álgebra Lineal I **Universidad de la República**
Curso 2014 **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Examen Julio 2014

1. Sean V, W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ un isomorfismo. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

   a) Probar que $T : V \oplus W \to V \oplus W$ dada por $T(v, w) = \big(f^{-1}(w), f(v)\big)$ es una transformación lineal, que es un isomorfismo. Hallar T^{-1}.

   b) Probar que $L_1 = \big\{(v, w) \in V \oplus W : T(v, w) = (v, w)\big\}$ es un subespacio vectorial, y que $(v, w) \in L_1$ si y sólo si $w = f(v)$. Hallar una base de L_1, que llamaremos $\mathcal{C}_1$.

   c) Probar que $L_2 = \big\{(v, w) \in V \oplus W : T(v, w) = -(v, w)\big\}$ es un subespacio vectorial, y que $(v, w) \in L_2$ si y sólo si $w = -f(v)$. Hallar una base de L_2, que llamaremos $\mathcal{C}_2$.

   d) Probar que $V \oplus W = L_1 \oplus L_2$.

   e) Si $n = 2$, hallar la matriz asociada a T en la base $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

2. *a*) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifique $T(1 - x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(x^2 + 3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{N}(T) = \{a + ax + ax^2 : a \in \mathbb{R}\}$.

   Sugerencia: Hallar una base de $N(T)$.

   b) Probar que la transformación lineal hallada en a) es la única que verifica las condiciones pedidas.

   c) Hallar ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{C} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

   d) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$.

3. Sean U, V y W $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales, tales que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{N}(S)$, con S sobreyectiva y T inyectiva.

   a) Probar que $\dim V \geq \dim U + \dim W$.

   b) Probar que $\dim V = \dim U + \dim W$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{N}(S)$.

   c) Se sabe además que $\{u_1, u_2\}$ es una base de U, $\{w_1, w_2\}$ es una base de W y que $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es ua base de V tal que:

   $$S(v_1) = w_1, S(v_2) = w_1 + w_2, S(v_3) = w_1 - w_2, v_4 = T(u_1), v_5 = T(u_2)$$

      1) Hallar una base de $\mathrm{N}(S)$.

      2) Hallar una base de $V/\mathrm{Im}(T)$ y una base de $\pi\big(\mathrm{N}(S)\big) \subset V/\mathrm{Im}(T)$, donde $\pi : V \to V/\mathrm{Im}(T)$ es la proyección canónica.

Solución:

1. *a*) Es evidente, ya que f es lineal. $T^{-1} = T$.

   b) $T(v,w) = \big(f^{-1}(w), f(v)\big) = (v,w)$ si y sólo si $w = f(v)$. $\mathcal{C}_1 = \big\{(v_1, f(v_1)), \dots, (v_n, f(v_n))\big\}$.

   c) $T(v,w) = \big(f^{-1}(w), f(v)\big) = (-v,-w)$ si y sólo si $w = -f(v)$. $\mathcal{C}_2 = \big\{(v_1, -f(v_1)), \dots, (v_n, -f(v_n))\big\}$.

   d) Como $L_1 \cap L_2 = (0,0)$ son linealmente disjuntos. Por dimensión tenemos que $V \oplus W = L_1 \oplus L_2$.

   e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) $\{1 + x + x^2\}$ es una base de $N(T)$.
   $1 = -(1-x) + (x^2+3) - (1+x+x^2)$, $x = -2(1-x) + (x^2+3) - (1+x+x^2)$, $x^2 = 3(1-x) - 2(x^2+3) + 3(1+x+x^2)$. Luego $T(a+bx+cx^2) = \left(\begin{smallmatrix} a+b-2c & a+b+2c \\ -a-2b+3c & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   b) Como $\{1-x, x^2+3, 1+x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, T es única.

   c) ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   d) $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

2. *a*) Sabemos que $\dim V = \dim \mathrm{N}(S) + \dim W \geq \dim \mathrm{Im}(T) + \dim W$.

   b) En a), la igualdad se cumple cuando $\dim \mathrm{N}(S) = \dim \mathrm{Im}(T)$.

   c) Tenemos que $\dim \mathrm{N}(S) = 3$. Por otra parte, $-2v_1 + v_2 + v_3 \in \mathrm{N}(S)$, pero no es combinación lineal de v_4, v_5. Luego $\{-2v_1 + v_2 + v_3, v_4, v_5\}$ es una base de $\mathrm{N}(S)$.
   $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ es una base de $V/\mathrm{Im}(T)$.
   $\{\overline{-2v_1 + v - 2 + v_3}\}$ es una base de $\pi\big(N(S)\big)$