Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática

Examen de julio (19/7/2017)

1. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}, \\ W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

   a) Hallar bases de U y W.

   b) Probar que $\mathbb{R}^3 = U + W$ y que esta suma no es directa.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n mayor o igual a 2. Una *bandera en* V es una $n-1$-upla $F = (V_1, V_2, \cdots, V_{n-1})$ donde cada V_i es un subespacio de V de dimensión i y $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1}$.

   a) Describir las banderas de $\mathbb{R}^3$.

   b) Sea F una bandera en V. Demostrar que existe una base $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ de V tal que para cada $i \leq n-1$, se tiene que $\{v_1, v_2, \cdots, v_i\}$ es base de V_i. Diremos que $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ es *una base ordenada asociada* a la bandera F.

   c) Sea V_i el subespacio de $\mathbb{R}_n[t]$ formado por los polinomios de grado menor o igual a $i-1$.

      1) Probar que $F_g = (V_1, V_2, \cdots V_n)$ es una bandera en $\mathbb{R}_n[t]$.

      2) Probar que $(p_1, p_2, \cdots, p_{n+1})$ es una base ordenada asociada a la bandera F_g si y sólo si p_i tiene grado $i-1$.

   d) Dada una transformación lineal $T : V \to V$, diremos que una bandera $F = (V_1, V_2, \cdots, V_{n-1})$ en V es T-*invariante* si para todo i, se tiene $T(V_i) \subseteq V_i$.

      1) Si $D : R_n[t] \to R_n[t]$ está definida por $D(p) = p'$, probar que F_g es D-invariante.

      2) Sea B una base ordenada asociada a una bandera F. Probar que F es T-invariante si y sólo ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

3. *a*) Probar que dada una transformación lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existe $v_\phi \in \mathbb{R}^3$ que verifica

$$\phi(x) = < x, v_\phi > \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3,$$

   donde $<,>$ es el producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

   b) Demostrar además que un tal v_ϕ es único.

   c) Describir geométricamente el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x) = 1\}$

   d) Demostrar que la función $\phi \mapsto v_\phi$ define un isomorfismo lineal entre $(\mathbb{R}^3)^*$ y $\mathbb{R}^3$.

Nota: el ejercicio 1 es eliminatorio. El estudiante que no lo tenga esencialmente resuelto no aprobará el examen.

1. *a*) Los elementos de U son de la forma $(x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$ y los de W son de la forma $(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. Tanto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ como $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ son li, por lo que son bases de U y W respectivamente.

   b) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ es una generador de $\mathbb{R}^3$ (es li con 3 elementos) formada por elementos de U y W, por lo que $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W$ por lo que son iguales.
   La suma no es directa puesto que $(1, -2, 1) \in U \cap W$.

2. *a*) Los subespacios de dimensión 1 y 2 en $\mathbb{R}^3$ son respectivamente las rectas y los planos por el origen. Por lo tanto, las banderas de $\mathbb{R}^3$ son pares (r, π) donde r es una recta, π es un plano y $0 \in r \subseteq \pi$.

   b) Haremos inducción en $n = dimV$. Si $n = 2$, entonces alcanza con tomar una base $\{v_1\}$ de V_1 y extenderla a una base de V.
   Supongamos que el resultado vale para $n = k$ y que $dimV = k + 1$. Tomemos una bandera $F = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ de V. Entonces $F' = (V_1, V_2, \cdots, V_{k-1})$ es una bandera de V_k y por tanto tiene una base ordenada asociada $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$. Tenemos entonces un conjunto li en V. Agregando un elemento v_{k+1} que esté en V y no en V_k, obtenemos una bandera de V.

   c) 1) El espacio V_i de polinomios de grado menor o igual a $i-1$ tiene base $\{1, t, \cdots, t^{i-1}\}$ y por tanto dimensión i. Además todo polinomio de grado menor o igual a $i - 1$ es un polinomio de grado menor o igual a i, por lo que $V_i \subseteq V_{i+1}$.

      2) Supongamos aquí $n \geq 1$ (porque esto implica $dim\mathbb{R}_n[t] \geq 2$) y que tenemos una base ordenada $(p_1, \cdots, p_{n+1})$ de $\mathbb{R}_n[t]$, asociada a F_g. Veremos que cada p_i tiene grado $i - 1$, por inducción en n. Si $n = 1$, $\{p_1\}$ es base del espacio de polinomios de grado 0, por lo tanto tiene grado 0.
      Supongamos que para $n = k$ se verifica. Tomemos una base ordenada $B = \{p_1, p_2, \cdots, p_{k+1}\}$ asociada a $F_g = (V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$. Es claro que $B' = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ es una base ordenada asociada a la bandera $F'_g = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ de $\mathbb{R}_{k-1}[t]$, entonces por hipótesis de inducción, p_i tiene grado $i-1$, para todo $i \leq k$, por lo que el espacio generado por B' está formado por polinomios de grado menor o igual a $k - 1$. Sabemos que p_{k+1} tiene grado menor o igual a k. Para que B genere al monomio t^k, B tiene que contener algún polinomio de grado k y este tiene que ser p_{k+1} puesto que los otros tienen grado estrictamente menor.
      Recíprocamente si tenemos un conjunto ordenado de polinomios $(p_1, p_2, \cdots, p_{n+1})$ donde cada p_i tiene grado $i-1$, las coordenadas de este conjunto en la base canónica de $\mathbb{R}_n t$ forman una matriz cuadrada triangular superior cuyo determinante es no nulo. Este conjunto es por tanto una base de $\mathbb{R}_n t$. (Puesto que la función que toma coordenadas es un isomorfismo lineal.)

   d) 1) La derivada de un polinomio de grado i es un polinomio de grado $i - 1$, por lo que $D(V_i) \subseteq V_{i-1} \subseteq V_i$.

      2) Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base ordenada asociada a F. Si F es T-invariante, entonces $T(v_i) \in V_i$ por lo que es combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_i\}$ y la columna i correspondiente en la matriz asociada tendrá coeficientes nulos a partir del lugar $i + 1$. Por lo tanto la matriz asociada en cuestión es triangular superior.
      Recíprocamente, si la matriz es triangular superior, se tiene que para cada i, $T(v_i)$ es combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_i\}$ y por tanto $T(v_k)$ es combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_i\}$, para todo $k \leq i$, por tanto $v_k \in V_i, \forall k \leq i$. Como $\{v_1, \cdots, v_i\}$ es base de V_i, se deduce $T(V_i) \subseteq V_i$.

3. *a*) Como $\phi(x) = A.x$ donde A es una matriz 1×3, se tiene $A = (a, b, c)$ y

$$\phi(x_1, x_2, x_3)^t = (a, b, c).(x_1, x_2, x_3)^t = \langle A, (x_1, x_2, x_3) \rangle.$$

Tomando $v_\phi := A$ queda la tesis (el producto escalar es conmutativo).

b) Si $\langle x, v \rangle = \langle x, v' \rangle$ para todo x, entonces $\langle x, v - v' \rangle = 0, \forall x$, en particular $\langle v - v', v - v' \rangle = 0$ y por tanto $v - v' = 0$, i.e. $v = v'$.

c) Se trata del conjunto de los vectores x tales que $\langle x, v_\phi \rangle = 1$, es decir $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ (siguiendo la notación de la parte a)). Se trata entonces de un plano perpendicular a v_ϕ que pasa por ejemplo por $(\frac{1}{a}, 0, 0)$.

d) La función es claramente biyectiva. Su inversa es lineal (por la linealidad del producto escalar en la segunda variable). Se trata entonces de un isomorfismo.