Álgebra Lineal 1 – Curso 2019
Solución — 22/07/19

1. Hallar la ecuación de la recta r que satisface las siguientes condiciones:

   a) Es perpendicular al plano π que contiene a los puntos $A = (3, 4, 2)$, $B = (-1, 5, 3)$ y $C = (2, 1, 4)$.

   b) Pasa por el punto de intersección de la recta $\frac{x}{2} = y-1 = \frac{z+1}{-1}$ con el plano $2x-y-z = 1$.

   Solución:

   Los vectores directores del plano son $v = (1, 3, -2)$ y $w = (-3, 4, -1)$ por lo que la dirección perpendicular al plano es $v \wedge w = (5, 7, 13)$.

   Solo falta hallar el punto de intersección de la recta $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{-1}$ con el plano $2x - y - z = 1$.

   Reescribiendo las ecuaciones que definen la recta, tenemos $y = \frac{x}{2} + 1$ y $z = -\frac{x}{2} - 1$. Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos

$$1 = 2x - \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{2} + 1 = 2x.$$

   Por lo tanto $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = \frac{-5}{4}$.

   En conclusión la ecuación de la recta r es

$$r) = \lambda(5, 7, 13) + (1/2, 5/4, -5/4).$$

2. (a) Mostrar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x^3 + x^2 + x + 1) = (5, 2, -3)\ ;\ T(x^3 + x^2 + x) = (4, 2, -2);$$
$$T(x^3 - x^2) = (4, 3, -7)\ ;\ T(x^3 + x^2) = (2, 1, -3).$$

   Dar una fórmula explícita para $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

   (b) Sea $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{C} = \big\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.

   (c) Hallar bases para $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

   (d) Sea $W = \big\{p \in \mathbb{R}_3[x]\ :\ p"(0) = 0\ ,\ p(0) + p(1) = 0\big\}$. ¿ Se cumple que $\mathbb{R}_3[x] = W + \mathrm{N}(T)$? ¿ La suma $W + \mathrm{N}(T)$ es directa?

   Solución:

   a) Como una transformación lineal esta univocamente determinada por el valor en una base, basta probar que $A = \{x^3 + x^2 + x + 1; x^3 + x^2 + x; x^3 - x^2; x^3 + x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

   Veamos que $\{x^3 + x^2 + x + 1; x^3 + x^2 + x; x^3 - x^2; x^3 + x^2\}$ es li.

   Consideremos una combinación lineal igual a 0,

$$\alpha(x^3 + x^2 + x + 1) + \beta(x^3 + x^2 + x) + \gamma(x^3 - x^2) + \delta(x^3 + x^2) = 0$$

haciendo distributiva y ordenando se tiene

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha+\beta-\gamma+\delta)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$$

de donde se sigue, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

Por lo tanto se tiene que A es li, y como tiene la misma cantidad de vectores que la dimensión de $\mathbb{R}_3[x]$ es una base.

Para hallar la fórmula explicita necesitamos escribir ver como se escribe el polinomio ax^3+bx^2+cx+d como combinación lineal de la base A.

Observar que $T(1)=T(x^3+x^2+x+1)-T(x^3+x^2+x)=(1,0,-1)$, $T(x)=T(x^3+x^2+x)-T(x^3+x^2)=(2,1,1)$, $T(x^2)=\frac{1}{2}(T(x^3+x^2)-T(x^3-x^2))=(-1,-1,2)$ y $T(x^3)=\frac{1}{2}(T(x^3+x^2)+T(x^3-x^2))=(3,2-5)$.

Por lo tanto

$$T(ax^3+bx^2+cx+d)=aT(x^3)+bT(x^2)+cT(x)+dT(1)=(3a-b+2c+d,2a-b+c,-5a+2b+c-d)$$

b) Usando los cálculos realizados en la parte anterior, se tiene que

$$_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-1&2\\-1&1&2&-5\end{pmatrix}$$

c) Para hallar el núcleo debemos resolver el sistema

$$\begin{cases}3a-b+2c+d&=&0\\2a-b+c&=&0\\-5a+2b+c-d&=&0\end{cases}$$

Si a la tercer ecuacón le sumamos la primera, obtenemos $\begin{cases}3a-b+2c+d&=&0\\2a-b+c&=&0\\-2a+b+3c&=&0\end{cases}$, luego sumando la tercera y la segunda llegamos a $\begin{cases}3a-b+2c+d&=&0\\2a-b+c&=&0\\4c&=&0\end{cases}$ por lo tanto $c=0$, $b=2a$ y $d=-a$, es decir $\mathrm{N}(T)=\langle x^3+2x^2-1\rangle$.

Ahora, como $dim(\mathrm{N}(T))=1$ y $dim(\mathbb{R}_3[x])=4$ se tiene que $dim(\mathrm{Im}(T))=3$, por lo tanto $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}^3$ y podemos considerar la base $\mathcal{C}$.

d) Sea $p(x)=ax^3+bc^2+cx+d$, entonces $p''(0)=2b$ y $p(0)+p(1)=a+b+c+2d$, por lo tanto $W=\langle -x^3+x,-2x^3+1\rangle$, entonces $dim(W)=2$, por lo tanto

$$dim(W+\mathrm{N}(T))=dim(W)+dim(\mathrm{N}(T))-dim(W\cap\mathrm{N}(T))\leq dim(W)+dim(\mathrm{N}(T))\leq 3,$$

entonces $W+\mathrm{N}(T)\neq\mathbb{R}_3[x]$.

De la parte anterior tenemos que si $p\in\mathrm{N}(T)$ entonces $p=\lambda(x^3+2x^2-1)$. Derivando dos veces y evaluando en 0 se tiene que $p''(0)=4\lambda$ por lo tanto $p\in W\cap\mathrm{N}(T)$ si y sólo si $\lambda=0$, o sea, la suma es directa.

3. Se consideran 2 espacios vectoriales de dimensión finita V, W y subespacios $V_1, V_2 \subset V$, $W_1, W_2 \subset W$ tales que $V_! + V_2 = V$ y $W_1 + W_2 = W$. Sea $T_1 : V_1 \to W_1$ una transformación lineal inyectiva, y $T_2 : V_2 \to W_2$ una transformación lineal sobreyectiva.

   a) Supongamos que $T_1|_{V_1 \cap V_2} = T_2|_{V_1 \cap V_2}$ (es decir $T_1(v) = T_2(v)$ para todo $v \in V_1 \cap V_2$). Probar que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T|_{V_1} = T_1$ y $T|_{V_2} = T_2$.

   b) Probar que si W_1 y W_2 son linealmente disjuntos entonces $V_1 \cap V_2 \subset N(T)$.

   c) Probar que $\dim Im(T) \leq \dim W_2 + \dim V_1 - dim(V_1 \cap V_2)$.

   d) Si $W = W_1 \oplus W_2$, probar que $\dim Im(T) = \dim W_2 + \dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)$. Deducir que $N(T) = N(T_2)$.

Solución:

a) Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_l\}$ una base de V tal que $\{u_1, \cdots, u_r\}$ es una base de $V_1 \cap V_2$, $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_k\}$ es una base de V_1 y $\{u_1, \cdots, u_r, w_1, \cdots, w_l\}$ una base de V_2.

Sabemos que existe una tal base porque basta tomar una base de la intersección y completarla a una base de V_1 y luego a una de V.

Definimos entonces $T : V \to W$ como la única transformación lineal tal que

$$T(u_i) = T_1(u_i);\ T(v_j) = T_1(v_j);\ T(w_k) = T_2(w_k)\ \textit{para todo}\ i, j, k.$$

Observar que si $v \in V_1$ se tiene que $v = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j$ y por lo tanto $T(v) = \sum \alpha_i T(u_i) + \sum \beta_j T(v_j) = T_1(v)$. Del mismo modo como $T_1(u_i) = T_2(u_i)$ para todo i, se tiene $T(w) = T_2(w)$ si $w \in V_2$.

Consideremos ahora una transformación lineal $S : V \to W$ tal que $S|_{V_1} = T_1$ y $S|_{V_2} = T_2$, entonces se tiene que $S(v) = T(v)$ para todo $v \in \mathcal{B}$, por lo tanto $S = T$.

b) Observar que $T(V_1 \cap V_2) \subseteq W_1 \cap W_2$. De donde se sigue que si $W_1 \cap W_2 = 0$, entonces $V_1 \cap V_2 \subset N(T)$.

c) Aplicando el teorema de las dimensiones para T obtenemos

$$dim(Im(T)) = dim(V) - dim(N(T)).$$

Por otro lado se tiene que $dim(V) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2)$, por lo tanto

$$dim(Im(T)) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2) - dim(N(T)).$$

Aplicando el teorema de las dimensiónes para T_2 y el hecho que es sobreyectiva obtenemos $dim(W_2) = dim(V_2) - dim(N(T_2))$.

Como $N(T_2) \subset N(T)$, se tiene que $dim(W_2) \geq dim(V_2) - dim(N(T))$.

De donde se sigue

$$dim(Im(T)) \leq dim(V_1) + dim(W_2) - dim(V_1 \cap V_2).$$

d) Si $W = W_1 \oplus W_2$, se tiene que $W_1 \cap W_2 = 0$ por lo tanto, aplicando la parte b), $V_1 \cap V_2 \subset N(T)$. Ahora como T_1 es inyectiva, y $T|_{V_1 \cap V_2} = T_1|_{V_1 \cap V_2}$ se tiene que $N(T) = N(T_2)$. Entonces la desigualdad de la parte anterior se transforma en una igualdad.