Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal I
Licenciatura en Matemática

Examen de marzo (?/3/2018)

1. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v) = (1,1,1) \wedge v$.
   (a) Hallar $_{can}[T]_{can}$ y $_{B}[T]_{B}$, donde *can* es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,-1),(1,-1,0)\}$.
   (b) Hallar bases del núcleo y de la imagen de T.
   (c) Sea $r \subset \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $(1,2,3)$ y $(-1,0,1)$. Hallar sus ecuaciones paramétrica y reducida.
   (d) Hallar $T(r)$ y un plano que contenga a r y $T(r)$.

2. Sean $\mathcal{B} := \{t^2+1, t, 1\} \subset \mathbb{R}_2[t]$ y $\mathcal{C} := \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
   a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_2[t]$ y $\mathcal{C}$ lo es de $\mathbb{R}^3$.
   b) Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ está dada por
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   c) Sea $S : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la transformación lineal definida por
   $$S(p) = p'$$
   Calcular $_{\mathcal{C}}[T \circ S]_{\mathcal{B}'}$, donde $\mathcal{B}'$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$.

3. Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \to W$ una transformación lineal.
   a) Sea H subespacio de V. Probar que $\dim T(H) = \dim H - \dim(H \cap N(T))$.
   b) Sea K subespacio de W. Probar que $\dim T^{-1}(K)) = \dim(K \cap Im(T)) + \dim(N(T))$.