Álgebra Lineal I
Examen Mayo 2012

1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T, S : V \to W$ transformaciones lineales. Se recuerda que notamos $rk(T)$ a la dimensión de $Im(T)$.

   a) Probar que $rk(T+S) \leq rk(T) + rk(S)$.

   b) Dar un ejemplo en que no valga la igualdad.

   c) Dar un ejemplo en que valga la igualdad.

   d) Probar que la igualdad vale si y sólo si $Im(T) \cap Im(S) = 0$ y $\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Ker}(S) = V$.

2. Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ tales que $\dim V_2 \leq \dim V_1$, y $V = V_1 \oplus V_2$. Se sabe que existen dos transformaciones lineales $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_1$ y una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V_1 tal que

$$_B\big[g \circ f\big]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que $g \circ f : V_1 \to V_1$ es un isomorfismo. Calcular $_B\big[(g \circ f)^{-1}\big]_B$.

   b) Deducir que f y g son isomorfismos.

   c) ¿Cuál es la dimensión de V?

   d) Probar que la fórmula $T(w_1 + w_2) = f(w_1) + g(w_2)$, $w_i \in V_i$ determina una transformación lineal $T : V \to V$. Probar que $C = B \cup f(B)$ es base de V y calcular $_C\big[T\big]_C$.

3. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (a, 0, 0)$, $Q = (a, 0, b)$, $R = (0, a, -b)$ con a y b positivos.

   a) Verificar que P,Q y R no están alineados.

   b) Hallar el área del triángulo PQR.

   c) Verificar que O no pertenece al plano que contiene al triángulo PQR.

   d) Calcular el volumen de la pirámide OPQR.

Solución:

1. *a*) Como $Im(T+S) \subseteq Im(T) + Im(S)$, se tiene

$$rk(T{+}S) = dim(Im(T{+}S)) \leq dim(Im(T){+}Im(S)) = dim(Im(T)){+}dim(Im(S)){-}dim(Im(T){\cap}Im(S)) \leq$$

   b) Tomar $V = W = \Bbbk$ y $T = S = id$. Se tiene $rk(T+S) = 1$ y $rk(T) + rk(S) = 2$.

   c) Tomando $V = W = \mathbb{R}^2$, $T = e_1^*, S = e_2^*$ (siendo $\{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$), se tiene $T+S = id$ de donde $rk(T+S) = 2 = rk(T) + rk(S)$.

   d) La igualdad vale si y solo si valen las dos desigualdades en la prueba de a).
   La segunda desigualdad en la prueba de a) vale si y solo di $Im(T) \cap Im(S) = 0$.
   Supongamos que vale la igualdad y tomemos $v \in V$. Se tiene $T(v) \in Im(T+S)$, por lo que existe $u \in V$ tal que $T(v) = (T+S)(u)$, de donde $T(v-u) = S(u)$ y como $Im(T) \cap Im(S) = 0$, se deduce $v - u \in \operatorname{Ker}(T)$ y $u \in Ker(S)$, por lo que $v = (v-u) + u \in \operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Ker}(S)$.
   Recíprocamente, si vale las condiciones en la imagen y en el núcleo y tomamos $v, u \in V$, se tiene $v = v_T + v_S, w = w_T + w_S$, con $v_T, w_T \in \operatorname{Ker}(T), v_S, w_S \in \operatorname{Ker}(S)$ y por tanto

$$T(v) + S(u) = T(v_S) + S(w_T) = (T+S)(v_S + w_T) \in Im(T+S).$$

2. *a*) La matriz asociada es invertible, con inversa

$${}_B\big[(g \circ f)^{-1}\big]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   b) COmo $g \circ f$ es inyectriva, deducimos que f es inyectiva, por lo que $\dim V_1 \leq \dim V_2$. Luego las dimensiones son iguales, y como f es inyectiva es un isomorfismo. Como g es sobreyectiva, es un isomorfismo.

   c) 6

   d) Propiedad universal de la suma directa. EL conjunto $C = \{v_1, v_2, v_3, f(v_1), f)(v_2), f(v_3)\}$ es una base de V ya que f es un isomorfismo, y tenemos

$${}_C\big[T\big]_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *a*) Es suficiente observar que los vectores $PQ = (0,0,b)$ y $PR = (-a, a, b)$ son l.i. para $a, b > 0$.

   b) El área pedida es $\frac{1}{2}||PQ \times PR|| = \frac{\sqrt{2}}{2}ab$.

   c) Basta observar que los vectores OP, OQ y OR son l.i., lo cual es cierto porque el determinante de la matriz de sus coordenadas es $-a^2b \neq 0$.

   d) Sabemos que el volumen de la pirámide es un sexto del volumen del paralelepípedo que generan los vectores OP, OQ y OR, de manera que por la parte anterior el volumen pedido es $\frac{1}{6}a^2b$.