Groucho Marx

Probabilidad - Clase 30
Teorema Central del Límite (TCL)

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Teorema (Chebishev)

Consideremos una sucesión de variables aleatorias

$$X_1, X_2, \dots,$$

independientes dos a dos, y con esperanzas matemáticas $a_1, a_2, \dots$. *Supongamos que se cumple la condicion*

$$\mathbf{var}\, X_n \leq C, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

donde C *es una constante arbitraria. Entonces*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \tag{1}$$

Corolario: teorema de Bernoulli

- Consideremos n experimentos independientes, con 2 resultados (éxito y fracaso), y probabilidad de éxito igual a p en cada experimento ($0 < p < 1$).
- Sea μ la cantidad de éxitos en n experimentos.
- Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias, cada una de las cuales toma el valor 1 con probabilidad p (si ocurre un éxito) y el valor 0 con probabilidad $q = 1 - p$ (si ocurre un fracaso).

- Tenemos $\mathbf{E}\, X_i = p$, $\mathbf{var}\, X_i = pq \leq 1$ para cada $i = 1, 2, \ldots$.
- Además $\mu = \sum_{i=i}^{n} X_i$, porque la suma contiene tantos sumandos iguales a uno como éxitos ocurren en los primeros n experimentos, siendo nulos los sumandos restantes.
- Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ son independientes dos a dos y cumplen la condición $\mathbf{var}\, X_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, por lo que es aplicable el teorema de Chebishev:

$$\mu/n \xrightarrow{\mathbf{P}} p.$$

- La última afirmación significa que la frecuencia de éxitos en n experimentos, converge en probabilidad a p, la probabilidad de éxito en un experimento.

Sucesión de v.a.i.i.d.

- Un concepto central en probabilidad y estadística es la de *sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas* [1]
- Se trata de una sucesión $X_1, X_2, \dots$ de v.a. tales que
  - Para todo n las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes
  - La distribución de todas las variables es igual (a la de X_1, por ejemplo).
- En particular, las variables son independientes dos a dos (como en el T. de Chebishev).

[1] eso suena tan raro porque imita al inglés: *sequence of independent and identically distributed random variables (i.i.d. r.v.)*

Teorema Central del Límite[2]

Consideremos una sucesión de v.a.i.i.d.

$$X_1, X_2, \ldots .$$

Supongamos que tienen

- Esperanza finita: $\mathbf{E}\, X_1 = a$.
- Varianza finita y positiva: $\mathbf{var}\, X_1 = \sigma^2 > 0$

Entonces

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

cuando $n \to \infty$, uniformemente en a, b.

[2]Teorema de Lindeberg-Lévy

El TCL es un resultado de velocidad de convergencia:

- Nosotros sabemos que
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to a.$$

- es decir
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \to 0.$$
¿A que velocidad tiende a cero?

- Determinar α tal que
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

- es decir
$$n^\alpha \left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a \right) \sim 1.$$

- Resulta que $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right) \sim \textit{algo}.$$

- cuentas...

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sqrt{n}} \sim \textit{algo}.$$

- y ese algo resulta σZ (no es constante, pero no depende de n!)
- cuentas...

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim Z.$$

- Por último, teníamos

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \sim Z.$$

- podemos escribir

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na \sim \sigma\sqrt{n}Z.$$

- Resulta:

$$\boxed{X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim na + \sigma\sqrt{n}Z.}$$

Una idea

Sea

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n., \qquad Z_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

Tenemos

$$\mathbf{E}\, Z_n = \frac{\mathbf{E}\, S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\,\mathbf{E}\, X_1 - na}{\sigma\sqrt{n}} = 0.$$

$$\mathbf{var}\, Z_n = \mathbf{var}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{\mathbf{var}\, S_n}{\sigma^2 n} = \frac{n\,\mathbf{var}\, X_1}{n\sigma^2} = 1^3.$$

Sea $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Lo que dice el TCL es

$$\mathbf{P}(a < Z_n \leq b) \to \mathbf{P}(a < Z \leq b).$$

[3] Se usa la independencia

[3] Se usa la independencia

Normalización de variables

Si consideramos las variables *normalizadas*

$$Y_n = \frac{X_n - a}{\sigma},$$

tenemos

$$\mathbf{E}\, Y_n = \frac{1}{\sigma}\,\mathbf{E}\,(X_n - a) = \frac{1}{\sigma}\,(\mathbf{E}\, X_n - a) = 0.$$

$$\mathbf{var}\, Y_n = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathbf{var}\,(X_n - a) = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathbf{var}\, X_n = 1.$$

Ademas, son i.i.d. El teorema para las $\{Y_n\}$ queda así:

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \leq b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

Aplicación: Teorema de De-Moivre - Laplace

Supongamos como antes que tenemos un esquema de Bernoulli:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ 0, & \text{con probabilidad } 1 - p = q. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{E}\, X_1 = p, \qquad \mathbf{var}\, X_1 = pq$$

Si llamamos $\mu_n = X_1 + \cdots + X_n$, el TCL nos dice

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

que es exactamente el enunciado del TCL de De-Moivre - Laplace.

Aplicación para simulación

Una forma aproximada de simular variables normales, es a través del TCL. Como las variables básicas que se simulan son uniformes, es claro que si n es suficientemente grande se puede utilizar el TCL para simular v.a. normales. Sea entonces $U_1, U_2, \ldots$ v.a.i. uniformes en $[0,1]$. Tenemos

$$\mathbf{E}\, U_1 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{var}\, U_1 = \mathbf{E}(U_1^2) - (\mathbf{E}\, U_1)^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

¿Cuántas variables se precisan?

- En realidad, preciamos un teorema de *velocidad* de aproximación
- En la práctica se usa $n = 6$ (para variables uniformes)
- Como

  $$\frac{1}{2}n = 3, \qquad n\sigma^2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

  Resulta

  $$Z_n = \sqrt{2}\,(U_1 + \cdots + U_6 - 3) \sim Z.$$

- Geometricamente, la probabilidad puede verse como el volumen de un tetraedro inserto en un hiper- cubo

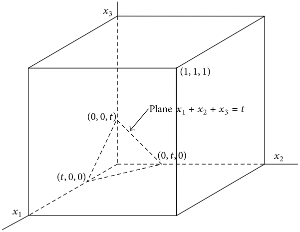

Figura: Suma de 3 variables uniformes (distribución de Irwin-Hall)

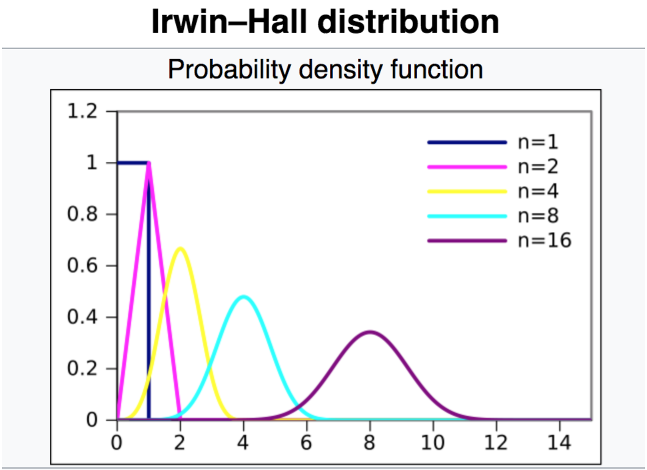

Figura: Suma de n variables uniformes (distribución de Irwin-Hall)

La campana de Gauss extendida: