Capítulo 6

Espacio cociente

En esta sección estudiamos el cociente de un espacio vectorial V por un subespacio $W \subset V$. Este espacio vectorial se define como el conjunto cociente de V por una relación de equivalencia conveniente. La noción de espacio cociente es muy importante dentro del álgebra lineal. Los teoremas 6.7 y 6.19 y sus corolarios 6.13 y 6.20 son una muestra de la utilidad de este concepto.

Definición 6.1. Si V es un espacio vectorial y W es un subespacio cualquiera, definimos en V la siguiente relación de equivalencia: $v \sim_W v'$ si $v - v' \in W$.

Observación 6.2. (1) El subespacio W en general se considera fijo y por ese motivo el símbolo $\sim_W$ se escribe omitiendo el subíndice como $\sim$.
(2) Es claro que $v \sim v'$ si y sólo si existe $w \in W$ de modo que $v = v' + w$.
(3) Es claro que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia. Por ejemplo, si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$, entonces $v - v'' = (v - v') + (v' - v'') \in W$, por lo que $v \sim v''$. (4) Si $W = \{0\}$, $v \sim v'$ si y sólo si $v = v'$ y si $W = V$ para todo par $v, v' \in V$, $v \sim v'$.
(5) Recordar que si $v \in V$ su clase de equivalencia es un subconjunto de V:

$$[v] = \{v' \in V : v' \sim v\} = \big\{v' \in V : v' = v + w \text{ para algún } w \in W\big\}.$$

En otras palabras, la clase de equivalencia de v es el subconjunto $v + W \subset V$.

Definición 6.3. En la situación anterior, la clase de equivalencia de $v \in V$ se nota $[v]$ o $v + W$. El conjunto cociente $V/\sim$, se nota $V/W = \big\{[v] : v \in V\big\}$ y se denomina *espacio cociente* de V por W.

La proyección canónica $\pi : V \to V/W$ – que existe para cualquier relación de equivalencia, en particular la considerada más arriba – explícitamente se define como $\pi(v) = [v] = v + W$.

A priori V/W es tan sólo un conjunto. Probaremos que de hecho es un espacio vectorial con operaciones que hacen que $\pi : V \to V/W$ sea una transformación lineal.

Lema 6.4. *En la situación anterior tenemos que:*
(1) Si $v_1 \sim v_1'$ y $v_2 \sim v_2'$ entonces $v_1 + v_2 \sim v_1' + v_2'$ para todo $v_1, v_2, v_1', v_2' \in V$.
(2) Si $v \sim v'$ entonces $av \sim av'$ para todo $v, v' \in V$ y $a \in \Bbbk$.

Demostración. (1) Si $v_1 \sim v_1'$ y $v_2 \sim v_2'$ entonces existe $w_1, w_2 \in W$ tales que $v_1 = v_1' + w_1$ y $v_2 = v_2' + w_2$. Entonces $v_1 + v_2 = v_1' + v_2' + w_1 + w_2$ y como $w_1 + w_2 \in W$ concluimos que $v_1 + v_1' \sim v_2 + v_2'$.
(2) La demostración de esta propiedad es muy semejante a la anterior y queda como ejercicio. $\square$

Teorema 6.5. *Se definen en V/W las siguientes operaciones: $[v]+[v']=[v+v']$ y $a[v]=[av]$ si $a\in\Bbbk$ y $v,v'\in V$. Con respecto a estas operaciones V/W es un espacio vectorial.*

Más aún, la proyección canónica $\pi : V\to V/W$ es una transformación lineal sobreyectiva, cuyo núcleo es W.

Demostración. El lema anterior nos garantiza que las definiciones de suma y producto por un escalar entre clases de equivalencia tienen sentido, o sea el resultado de sumar $[v]$ y $[v']$ no depende del par $v,v'\in V$ sino tan sólo de su clase de equivalencia modulo W. Lo mismo para producto por un escalar.

Necesitamos probar que se verifican para las operaciones definidas en V/W todos los axiomas de un espacio vectorial. Por ejemplo para probar la propiedad asociativa queremos probar que $\big([v]+[v']\big)+[v'']=[v]+\big([v']+[v'']\big)$. Para ello comenzamos operando en el lado derecho de esta igualdad:

$$\big([v]+[v']\big)+[v'']=[v+v']+[v'']=\big[(v+v')+v''\big]\big[v+(v'+v'')\big]=[v]+[v'+v'']=[v]+\big([v']+[v'']\big).$$

Se ha usado en esta cadena de igualdades la propiedad asociativa de la suma en el espacio V.

El vector cero en V/W es el vector $O_{V/W}=[0_V]=[w]$ para cualquier $w\in W$. Es claro que $[v]+0_{V/W}=[v+0]=[v]$ y luego ese vector es el neutro del espacio cociente. La verificación de los demás axiomas se hace de manera análoga.

Si tomamos $v,v'\in V$ y calculamos $\pi(v+v')$ tenemos que

$$\pi(v+v')=[v+v']=[v]+[v']=\pi(v)+\pi(v').$$

De forma parecida se prueba que $\pi(av)=a\pi(v)$ y así π es una transformación lineal. Que la proyección canónica es sobreyectiva es una propiedad general del espacio cociente por una relación de equivalencia que se observó cuando se vieron los elementos iniciales de teoría de conjuntos. Por otro lado, $\mathrm{N}(\pi)=\{v\in V:\pi(v)=0\}$. Pero $\pi(v)=0$ si y sólo si $[v]=[0]$ o sea si y sólo si $v\in W$. Luego $\mathrm{N}(\pi)=W$. $\square$

Observación 6.6. De hecho, la estructura de espacio vectorial en V/W definida en el Teorema 6.5 es la *única estructura* que hace de $\pi : V\to V/W$ una transformación lineal.

En efecto, supongamos que tenemos una estructura de espacio vectorial $(V/W,\widetilde{+},\tilde{\cdot},\widetilde{0})$, con $\widetilde{+}: V\times V\to V$ la suma $\tilde{\cdot}:\Bbbk\times V\to V$ el producto por un escalar ($\widetilde{0}$ sería el neutro para la suma $\widetilde{+}$), tal que para esa estructura $\pi : V\to V/W$ es una transformación lineal. Si $x,y\in V/W$ y $a\in\Bbbk$, entonces existe $v\in V$ tal que $x=[v]=\pi(v)$, por lo que

$$a\,\tilde{\cdot}\,x=a\,\tilde{\cdot}\,\pi(v)=\pi(av)=[av].$$

Del mismo modo, existe $v'\in V$ tal que $\pi(v')=[v']=y$, por lo que

$$x\,\widetilde{+}\,y=\pi(v)\,\widetilde{+}\,\pi(v')=\pi(v+v')=[v+v'].$$

La siguiente es una adaptación de la propiedad universal del cociente que vimos cuando estudiamos teoría de conjuntos, al caso del cociente de un espacio vectorial por un subespacio.

Teorema 6.7. *Sea V, U espacios vectoriales y $W \subset V$ un subespacio de V. Si $T : V \to U$ es una transformación lineal tal que $W \subset \mathrm{N}(T)$, entonces existe una única transformación lineal $\widehat{T} : V/W \to U$ que hace el diagrama de abajo conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & U \\ V/W \arrow[ur, dotted, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Es claro que si $v \sim v'$ y escribimos $v' = v+w$, con $w \in W$ entonces $T(v') = T(v+w) = T(v)+T(w) = T(v)$, ya que $w \in W \subset \mathrm{N}(T)$. Aplicando la propiedad universal del cociente probada en el Capítulo 1 (ver página 10), podemos asegurar la existencia y unicidad de una *función* $\widehat{T} : V/W \to U$ que hace el diagrama conmutativo. Para concluir la prueba, falta probar la linealidad de $\widehat{T}$. Como $\widehat{T} \circ \pi = T$ tenemos que para todo $v \in V$, entonces $T(v) = \widehat{T}\big(\pi(v)\big) = \widehat{T}\big([v]\big)$. Luego si $v, v' \in V$ tenemos que $\widehat{T}\big([v]+[v']\big) = \widehat{T}\big([v+v']\big) = T(v+v') = T(v)+T(v') = \widehat{T}\big([v]\big)+\widehat{T}\big([v']\big)$ lo que prueba que $\widehat{T}$ es aditiva. En forma semejante se prueba que $\widehat{T}\big(a[v]\big) = a\widehat{T}\big([v]\big)$ para todo $a \in \Bbbk$. $\square$

Observación 6.8. (1) En la situación anterior tenemos que $\mathrm{N}(\widehat{T}) = \pi\big(\mathrm{N}(T)\big)$ y que $\mathrm{Im}(\widehat{T}) = T(V) = \widehat{T}(V/W)$. La segunda afirmación se deduce inmediatamente del hecho de que la proyección canónica π es sobreyectiva. Por otro lado $\widehat{T}\big([v]\big) = 0$ si y sólo si $0 = \widehat{T}\big(\pi(v)\big) = T(v)$ y eso sucede si y sólo si $v \in \mathrm{N}(T)$, es decir $[v] \in \mathrm{N}(T)/W$.

(2) La construcción del cociente nos permite demostrar que dado un espacio vectorial V y un subespacio $W \subset V$ arbitrario, existe una transformación lineal $T : V \to U$ en algún espacio vectorial U de modo que $\mathrm{N}(T) = W$. En otras palabras, todo subespacio es el núcleo de alguna transformación lineal. Para demostrar lo anterior basta tomar $T = \pi : V \to V/W$ la proyección canónica.

(3) Es evidente que dado un subespacio vectorial $W \subset V$ existe una transformación lineal $T : U \to V$ para algún subespacio U de modo que $T(U) = W$. Para ello basta tomar $U = W$ y la transformación lineal T la inclusión canónica de W en V.

Teorema 6.14. *Sea V un espacio de dimensión finita y W un subespacio; entonces* $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.