Actividad 11: Espacio cociente. Perpendicularidad en $\mathbb{R}^n$. Espacio dual

Espacio cociente

1. En cada caso describir los elementos de V/W, su dimensión y hallar una base

   a) $V = \mathbb{R}^3$, W el plano horizontal Oxy.

   b) $V = \mathbb{R}_3[t]$, $W = \{at^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

   c) $V = \mathbb{R}_3[t]$, $W = \{p \mid p(5) = 0\}$

2. (a) Sea V un $k-$espacio vectorial y W un subespacio de V. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Probar que son equivalentes:

   (A) $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ es linealmente independiente en V/W.

   (B) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente y $\langle v_1, \dots, v_n\rangle \cap W = \{0\}$.

   (b) Sea $V = \mathbb{R}[x]$ y $W = \{x^3 p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Se consideran los siguientes conjuntos de V/W: $A = \left\{\overline{x^3 - x^2}, \overline{x^2 - x}, \overline{x}\right\}$, $B = \left\{\overline{x^2 - x}, \overline{x - 1}, \overline{-x^2 + 1}\right\}$ y $C = \left\{\overline{1 + x^4 + x^5}, \overline{x + x^7}, \overline{x^2 + x^3 + x^4}\right\}$.

   (i) Estudiar si son l.i o l.d..

   (ii) ¿Es alguno de ellos base de V/W?

3. Sea $V = \{f : [a, b] \to k\}$ y $W = \{f \in V \mid f(a) = 0\}$. Probar que $V/W \cong \mathbb{k}$.

4. Sea $V = \{\{x_n\} \subseteq \mathbb{k} \mid \{x_n\} \text{ converge}\}$ y sea $W = \{\{x_n\} \in V \mid \lim x_n = 0\}$. Probar que $V/W \cong \mathbb{k}$.

5. Considerar el espacio $V = \mathbb{R}_n[x]$ y el conjunto W de los polinomios que se anulan en 3 y en 8.

   a) Probar que W es un subespacio.

   b) Hallar una base de V/W.

6. Sean V y W subespacios de un espacio E. Probar que:
$$\frac{V + W}{V} \cong \frac{W}{V \cap W} \text{ y deducir } \frac{V \oplus W}{V} \cong W.$$

7. Sea V un espacio vectorial, W y U subespacios de V tales que $W \subseteq U \subseteq V$. Probar que $\frac{V/W}{U/W} \cong V/U$.

   Los siguientes dos ejercicios (8 y 9) son optativos sobre este tema, con la idea de que puedan avanzar sobre los temas siguientes.

8. El objetivo de este ejercicio es presentar una descripción de los subespacios de V/W a partir de los subespacios de V.

   (a) Sea $T : V \to W$ una transformacion lineal. Si $L \subset V$ es un subespacio, probar que $T^{-1}(T(L)) = L + N(T)$.

   (b) Deducir que si $\pi : V \to V/W$ es el mapa cociente asociado a $W \subset V$ subespacio, se tiene $\pi^{-1}(\pi(L)) = L + W$

(c) Definimos $A = \{L \subset V : L \text{ es subespacio y } W \subset L\}$, $B = \{M \subset V/W : M \text{ es subespacio}\}$ y $F : A \to B$ como

$$F(L) = \pi(L)$$

probar que F es biyectiva. Esto es, hay una correspondencia biyectiva entre los subespacios de V/W y los subespacios de V que contienen a W.

9. En este ejercicio, proponemos no usar el Teorema de las Dimensiones, sino demostrarlo de otra forma:

   a) Sin usar el Teorema de las Dimensiones, demostrar que $dimV/W = dimV - dimW$. (Sugerencia: considerar la proyección canónica $\pi : V \to V/W$, tomar una base de V/W y considerar un conjunto de representantes de dicha base).

   b) Deducir de la parte anterior, el Teorema de las dimensiones en general.

Perpendicularidad en $\mathbb{R}^n$

10. Recordar que la noción algebraica de perpendicularidad en $\mathbb{R}^3$ es $v \perp w$ si $\langle v, w\rangle = 0$.

    a) ¿Es $\perp$ una relación de equivalencia?

    b) Dado un conjunto X, definimos

    $$X^\perp = \{v \mid v \perp x \ \forall x \in X\}$$

    1) Calcular $(\mathbb{R}^3)^\perp$, $\{0\}^\perp$,$\{(1,1,1)\}^\perp$, $r^\perp$ y $\pi^\perp$, siendo r la recta de ecuación $x = y = z$ y π el plano de ecuación $x + y + z = 0$.
    2) Probar que $X^\perp$ es un subespacio.
    3) Probar que si $X \subseteq Y$, entonces $X^\perp \supseteq Y^\perp$.
    4) Probar que si un conjunto G es generador de un subespacio S entonces $G^\perp = S^\perp$.

11. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

    a) Hallar $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}\}^\perp$ siendo F_i la fila i de la matriz A.

    b) Hallar $N(L_A)$.

    c) Hallar $Im(L_{A^t})^\perp$.

    d) Hallar las soluciones del sistema $A \cdot v = 0$.

    e) Comparar los resultados.

12. Extendiendo la definición algebraica de producto escalar en $\mathbb{R}^3$, definir producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Luego, extender la noción de perpendicularidad y generalizar el Ejercicio 10*b* a vectores de $\mathbb{R}^n$.

13. *a*) Probar que para cualquier subespacio S de $\mathbb{R}^n$, se tiene $S \cap S^\perp = \{0\}$.

    b) Deducir que $\dim S \leq n - dim(S^\perp)$.

14. **Rango por filas vs. rango por columnas** Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera.

    a) Concluir que $N(L_A) = (ImL_{A^t})^\perp$.

    b) Deducir que $\dim Im(L_{A^t}) \leq \dim Im(L_A)$.

c) Concluir que el rango por filas de una matriz coincide con el rango por columnas.

Observación:

- La misma prueba vale para matrices sobre $\mathbb{C}$, comentaremos esto en clase,
- Para pruebas sobre cuerpos más generales se usa la noción de espacio dual, que presentamos brevemente en los próximos ejercicios.

Espacio dual

15. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita. Se considera el $\Bbbk$-espacio vectorial $V^* = Hom(V, \Bbbk)$, que llamamos **el dual de** V.

    a) Probar que si $B = \{e_1, e_2 \cdots, e_n\}$ es base de V, entonces las transformaciones lineales e_i^* definidas en B mediante
    $$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$
    forman una base de V^*. La notamos $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ y llamamos **base dual a** B.

    b) Deducir que $dim(V^*) = dim(V)$.
    En clase: comentarios sobre el caso de dimensión infinita.

    c) Hallar la base dual en los siguientes casos:
        1) $V = \mathbb{R}^2$ y B es la base canónica.
        2) $V = \mathbb{R}^3$ y $C = \{(1,1,1), (0,2,0), (0,1,-1)\}$.
        3) $V = \Bbbk_2[t]$ y $D = \{1, t-3, t^2\}$.

16. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios de dimensión finita. Definimos $T^* : W^* \to V^*$ como $T^*(f) = f \circ T$.

    a) Probar que T^* es lineal.

    b) Sean $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ bases respectivas de V y W. Calcular $T^*(c_i^*)(b_j)$.

    c) Hallar ${}_{B^*}[T^*]_{C^*}$ a partir de ${}_C[T]_B$.

    d) Considerar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de definida por $T(x,y) = (2x - y, y, x)$.
        1) Hallar $B^*{}_{T^*}[C^*]$ siendo B y C como en el ejercicio **??**
        2) Calcular $T^*(f)$ para $f \in \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = x + 2y - z$.