Esto no lo dijo Quino:

Figura: ¡A no estresarse y estudiar con alegría!

Probabilidad - Clase 31
Modelo SEIR para una epidemia

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

- Se trata de simular el modelo SEIR para una epidemia, como por ejemplo la del covid-19.
- El tiempo es continuo y la unidad de tiempo es el día.
- Tenemos una población de N individuos.
- En en cada momento del tiempo, cada integrante de la población está en una de cuatro categorías:

(S) Susceptibles: son las personas que están sanas y pueden infectarse.

(E) Expuestos: son las personas que están infectadas pero no presentan síntomas y no infectan a los demás.

(I) Infectados: son las personas infectadas que ya presentaron síntomas e infectan a una parte de quienes se contactan con ellos.

(R) Son las personas removidas de la epidemia, por recuperarse o fallecer (cosa que el modelo no distingue). Los recuperados ya no se infectan, están inmunes.

Cuatro clases

- En cada tiempo tenemos entonces un vector de cuatro coordenadas
$$(n_S, n_E, n_I, n_R)$$
que indica cuantas personas están en cada categoría.
- Se verifica
$$n_S + n_E + n_I + n_R = N,$$
la población total.

Evolución

Los cambios de estado en el modelo se producen entre tiempos exponenciales, de acuerdo a las siguientes reglas:

(I) En el momento inicial hay un grupo de infectados y el resto son susceptibles

(II) Cada individuo infectado infecta a un susceptible en un tiempo exponencial de parámetro β (la tasa de contagio). El susceptible infectado pasa a la categoría E (expuesto). La tasa de contagio β es el producto de dos cantidades:

$$\beta = \hat{\beta} p$$

donde $\hat{\beta}$ es un parámetro de conectividad social, que mide cuantos contactos tiene en promedio una persona, y p es la probabilidad de infección a partir de un contacto[1]

[1] Las medidas de cuarentena reducen $\hat{\beta}$, mientras que las medidas de distanciamiento social y uso del tapabocas reducen la probabilidad de contagio p.

(III) Cada individuo expuesto, luego de un tiempo exponencial de parámetro ℓ presenta síntomas y pasa a ser infectado (el tiempo entre la infección y los síntomas se denomina período de latencia).

(IV) Cada individuo infectado pasar a removido luego de un tiempo exponencial, con un parámetro γ (tasa de remoción). El tiempo de remoción depende básicamente de dos factores:

- El individuo deja de ser contagioso (se cura o fallece),
- El individuo entra en cuarentena.

Las transiciones entre estados de la enfermedad se grafican:

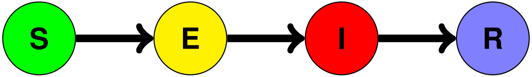

Figura: Transiciones entre los estados de la enfermedad en un modelo SEIR

El modelo más clásico y básico para epidemias es el modelo SIR:

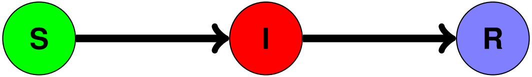

Figura: Transiciones entre los estados de la enfermedad en un modelo SIR

Las características del proceso conocidas son las siguientes:

- La evolución de la epidemia viene caracterizada por el parámetro
$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$
que es la cantidad promedio de infectados por cada infector.
- El tiempo de latencia tiene un promedio de 5 días.
- El tiempo de remoción es una variable crítica de la evolución de la epidemia. Un individuo pasa a ser removido esencialmente debido a tres situaciones:
  - El individuo se cura
  - El individuo fallece
  - El individuo entra en cuarentena[2].

  Como resumen de estas tres situaciones, vamos a suponer que el tiempo medio de remoción es de 5 días

---

[2] Este es el tema clave que impide la propagación de la epidemia, lograr que los individuos infectados entren en cuarentena

Como conclusión de estas consideraciones, asumimos que

$$\ell = 5, \qquad \gamma = 5, \qquad \beta = \gamma R_0 = 5R_0.$$

Entonces vamos a hacer simulación de escenarios con distintos valores de R_0. Para la simulación, se precisa el siguiente resultado.

Tarea: demostrar la proposición

Proposición

Sean $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *variables aleatorias independientes con distribución exponencial, con respectivos parámetros* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*. Entonces:*

(a) La variable aleatoria

$$T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n),$$

tiene distribución exponencial, con parámetro

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

(b) Se cumple

$$\mathbf{P}(T = T_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda},$$

es decir, el mínimo es T_i *con probabilidad proporcional a* λ_i*.*

Tarea: simulación del modelo

Para hacer la simulación viable, vamos a suponer un ejemplo con parámetros aproximados. La idea es explorar diferentes escenarios, inclusive con parámetros diferentes a los indicados.

- R_0 va a variar entre 1 y 2.
- Suponemos que la epidemia se inicia en tiempo $T = 0$ y finaliza en $T = 2$ o $T = 3$.
- Asumimos una población de entre 100 y 1000 habitantes
- $\gamma = 5$
- $\ell = 5$
- $\beta = R_0\gamma$

Tarea. Simular el proceso. Se propone dibujar en un mismo gráfico las cuatro trayectorias promediadas de la evolución de la epidemia. Se espera obtener un gráfico de la forma:

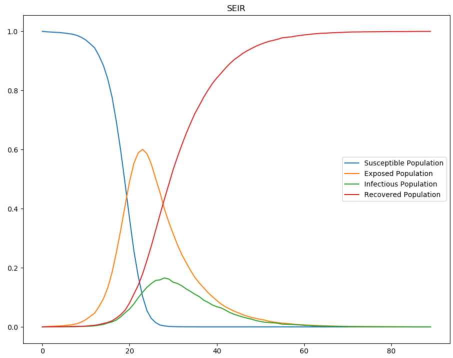

Figura: Trayectorias típicas de un modelo SEIR.

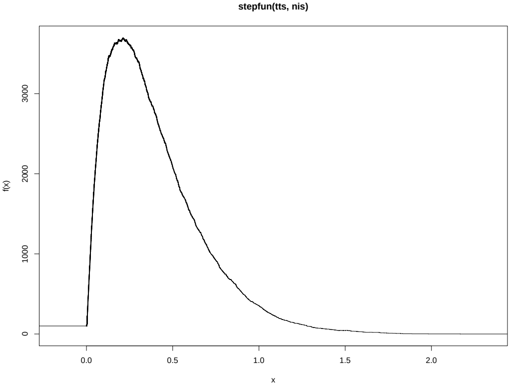

Figura: Trayectorias de infectados de un modelo SEIR.

Tarea. Debido al azar, existe la posibilidad de que la epidemia se extinga sola[4] Calcular la probabilidad de extinción mediante simulación, y dar un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de extinción. Para que esta probabilidad no sea despreciable, hay que encontrar parámetros adecuados (el R_0 podría ser menor que uno).

[4] No consideramos ingreso de infectados del exterior.

Tarea. Cantidad de fallecidos. Una estimación aproximada de la cantidad de fallecidos respecto de los infectados es del 3 %[5] Incorporar la curva de fallecidos al gráfico de anterior.

[5] En realidad, este porcentaje depende de la capacidad de testeo. Una política agresiva de testeo identifica a más infectados, incluyendo aquellos que no tienen síntomas y por lo tanto no serían detectables con una cantidad menor de tests.

Tarea. Saturación de CTI. Uno de los múltiples problemas que produce la epidemia es la saturación de los CTI. Se sabe que un 4% de los infectados requieren CTI y que ocupan una cama de CTI durante 20 días[6]. En Uruguay se cuenta con 500 camas de CTI que se pueden destinar a enfermos de covid. A partir de la simulación de infectados, dar un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de saturación de CTI.

[6] Son cifras promedio.

Tarea. Saturación de la capacidad de rastreo (tracking). Un elemento clave en el control de la epidemia es la capacidad de rastreo de los contactos de los infectados. Mediante un control de los contactos se puede reducir el parámetro β de intensidad de contagio. Vamos a suponer entonces que la tasa de contagio, en vez de ser una constante, es una función creciente de la proporcion $x = n_I/N$ de infectados, de la forma

$$\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Graficar las nuevas trayectorias bajo este supuesto, explorando posibles valores de β_1.


desmotivaciones.es
"El camino es la recompensa"