Se trata de simular el modelo SEIR para una epidemia, como por ejemplo la del covid-19. El tiempo es continuo y la unidad de tiempo es el día. Tenemos una población de N individuos. En en cada momento del tiempo, cada integrante de la población está en una de cuatro categorías:

(S) Susceptibles: son las personas que están sanas y pueden infectarse.

(E) Expuestos: son las personas que están infectadas pero no presentan síntomas y no infectan a los demás.

(I) Infectados: son las personas infectadas que ya presentaron síntomas e infectan a una parte de quienes se contactan con ellos.

(R) Son las personas removidas de la epidemia, por recuperarse o fallecer (cosa que el modelo no distingue). Los recuperados ya ni infectan ni se infectan, están inmunes.

En cada tiempo tenemos entonces un vector de cuatro coordenadas

$$(n_S, n_E, n_I, n_R)$$

que indica cuantas personas están en cada categoría, y se verifica

$$n_S + n_E + n_I + n_R = N,$$

la población total. Los cambios de estado en el modelo se producen entre tiempos exponenciales, de acuerdo a las siguientes reglas:

(I) En el momento inicial hay un grupo de infectados y el resto son susceptibles.

(II) Cada individuo infectado infecta a un susceptible, que pasa a la categoría E de expuesto, en un tiempo exponencial con parámetro $\beta \times (n_s/N)$.[1] La tasa de contagio β es el producto de dos cantidades:

$$\beta = \hat{\beta} p$$

[1] En el inicio de la epidemia y para valores grandes de N se puede asumir que $n_s/N = 1$, es lo que se denomina el *régimen lineal de la epidemia*.

donde $\hat{\beta}$ es un parámetro de conectividad social, que mide cuantos contactos tiene en promedio una persona, y p es la probabilidad de infección a partir de un contacto[2].

(III) Cada individuo expuesto, luego de un tiempo exponencial de parámetro ℓ presenta síntomas y pasa a ser infectado (el tiempo entre la infección y los síntomas se denomina período de latencia).

(IV) Cada individuo infectado pasar a removido luego de un tiempo exponencial, con un parámetro γ (tasa de remoción).

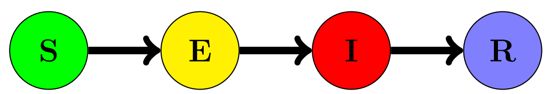

Figura 1: Transiciones entre los estados de la enfermedad

Las características del proceso conocidas son las siguientes:

- La evolución de la epidemia viene caracterizada por el parámetro

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

  que es la cantidad promedio de infectados por cada infector.

- El tiempo de latencia tiene un promedio de $1/\ell$ días. Viene modelado entonces por una variable exponencial de parámetro ℓ.

- El tiempo de remoción es una variable crítica de la evolución de la epidemia, y tiene un promedio de $1/\gamma$ días. Es una exponencial de parámetro γ. Un individuo pasa a ser removido esencialmente debido a tres situaciones:

  - El individuo se cura.
  - El individuo fallece.
  - El individuo entra en cuarentena[3].

[2] Las medidas de cuarentena reducen $\hat{\beta}$, mientras que las medidas de distanciamiento social y uso del tapabocas reducen la probabilidad de contagio p.

[3] Este es el tema clave que impide la propagación de la epidemia, lograr que los individuos infectados entren en cuarentena.

Como resumen de estas tres situaciones, vamos a suponer que el tiempo medio de remoción es de $1/\gamma = 5$ días.

Como conclusión de estas consideraciones, asumimos que

$$\ell = 1/5, \qquad \gamma = 1/5, \qquad \beta = \gamma R_0 = 5R_0.$$

Entonces vamos a hacer simulación de escenarios con distintos valores de R_0. Para la simulación, se precisa el siguiente resultado. **El informe debe contener la demostración de este resultado teórico.**

Proposición 1. *Sean $T_1, T_2, \ldots, T_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial, con respectivos parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Entonces:*

(a) *La variable aleatoria*

$$T = \text{mín}(T_1, T_2, \ldots, T_n),$$

tiene distribución exponencial, con parámetro

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

(b) *Se cumple*

$$\mathbf{P}(T = T_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda},$$

es decir, el mínimo es T_i con probabilidad proporcional a λ_i.

En el ejercicio tomamos N entre 100 y 1000 habitantes (un número mas grande es más realista pero el método directo de simulación es muy costoso). y R_0 entre 0.5 y 2. Suponemos que la epidemia se inicia en tiempo $T = 0$ con $n_I << N$. Lo que se grafica es la proporción de personas en cada clase.

Tarea 1. Simular el proceso para $N = 1000$ y $R_0 = 2$. Se propone dibujar en un mismo gráfico las cuatro trayectorias promediadas de la evolución de la epidemia. Se espera obtener un gráfico de la forma, pero suavizado por promedios:

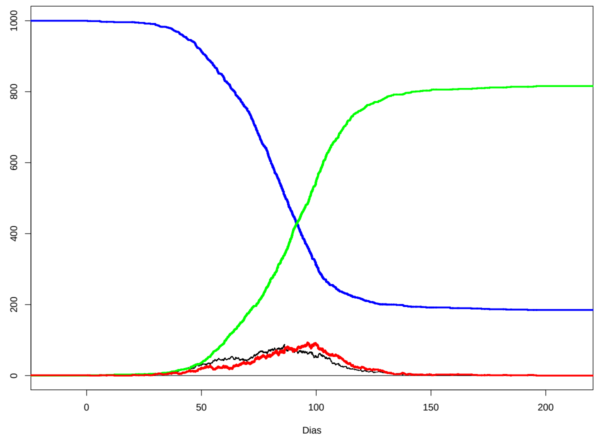

Figura 2: Una traectoria típica de un modelo SEIR. En azul la población susceptible, en rojo los infectados, en verde los removidos, y en negro los expuestos. Los parámetros en este caso son $N = 1000$, $R_0 = 2$, $\gamma = \ell = 1/5$.

Tarea 2. Debido al azar, existe la posibilidad de que la epidemia se extinga sola[4] Calcular la probabilidad de extinción mediante simulación, y dar un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo de extinción. Explorar para que valores de los parámetros esto ocurre, tomar un $R_0 < 1$. Por ejemplo $N = 1000$, $n_i = 50$, $R_0 = 0{,}99$ da un escenario interesante.

Tarea 3. Cantidad de fallecidos. Una estimación aproximada de la cantidad de fallecidos respecto de los infectados es del 3 %[5] Incorporar la curva de fallecidos al gráfico de anterior.

Tarea 4. Saturación de CTI. Uno de los múltiples problemas que produce la epidemia es la saturación de los CTI. Se sabe que un 4 % de los infectados requieren CTI y que ocupan una cama de CTI durante 20 días[6]. En Uruguay se cuenta, aproximadamente, con 2 camas de CTI cada 10000 habitantes que

[4] No consideramos ingreso de infectados del exterior.

[5] En realidad, este porcentaje depende de la capacidad de testeo. Una política agresiva de testeo identifica a más infectados, incluyendo aquellos que no tienen síntomas y por lo tanto no serían detectables con una cantidad menor de tests.

[6] Son cifras promedio.

pueden destinarse a enfermos de covid. A partir de la simulación de infectados para $N = 10000$, dar un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo de saturación de CTI, eligiendo un valor de R_0 que permita hacer la simulación (que es bastante lenta).

Tarea 5 (opcional). Saturación de la capacidad de rastreo (tracking). Un elemento clave en el control de la epidemia es la capacidad de rastreo de los contactos de los infectados. Mediante un control de los contactos se puede reducir el parámetro β de intensidad de contagio. Vamos a suponer entonces que la tasa de contagio, en vez de ser una constante, es una función creciente de la proporcion $x = n_I/N$ de infectados, de la forma

$$\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Graficar las nuevas trayectorias bajo este supuesto, explorando posibles valores de β_1. Comparar las cantidades de fallecidos como función de β_1.