Matemática Discreta

Lunes 13/7/20

Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Contents

Contents

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un multigrafo conexo. Luego* G *admite un circuito Euleriano si y solo todos sus vértices tienen grado par.*

Demostración de $(\Leftarrow)$

Demostración de ($\Leftarrow$)

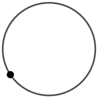
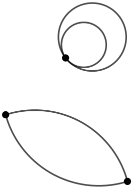
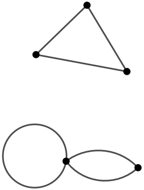
Lo hacemos por inducción en la cantidad de aristas n.

Demostración de $(\Leftarrow)$

Lo hacemos por inducción en la cantidad de aristas n. Los primeros casos son sencillos:

Demostración de ($\Leftarrow$)

Lo hacemos por inducción en la cantidad de aristas n. Los primeros casos son sencillos:

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
		

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Suponemos que todo grafo conexo con $m < n$ aristas y vértices de grado par admite un circuito Euleriano.

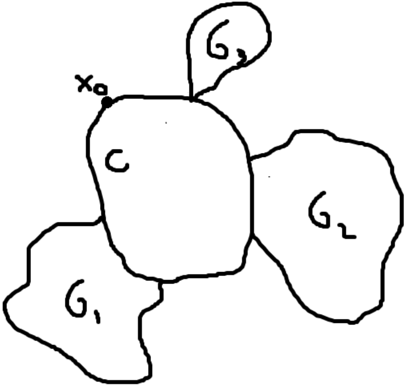
Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Suponemos que todo grafo conexo con $m < n$ aristas y vértices de grado par admite un circuito Euleriano. Tomamos G un grafo conexo con n aristas cuyos vértices tienen todos de grado par.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Suponemos que todo grafo conexo con $m < n$ aristas y vértices de grado par admite un circuito Euleriano. Tomamos G un grafo conexo con n aristas cuyos vértices tienen todos de grado par.

Fijamos x_0 un vértice de G (suponemos que no hay un lazo en x_0) y C un circuito que empieza y termina en x_0.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Suponemos que todo grafo conexo con $m < n$ aristas y vértices de grado par admite un circuito Euleriano. Tomamos G un grafo conexo con n aristas cuyos vértices tienen todos de grado par.

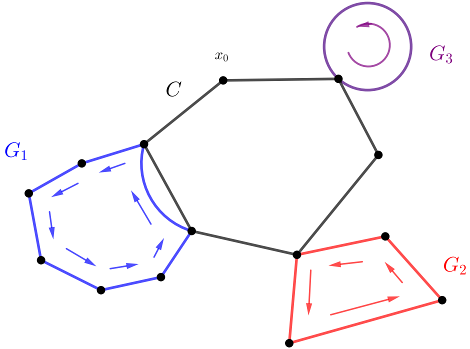
Fijamos x_0 un vértice de G (suponemos que no hay un lazo en x_0) y C un circuito que empieza y termina en x_0. (Esto queda como ejercicio. Sugerencia: tomar un recorrido de longitud máxima y probar que este debe ser un circuito.)



El grafo que resulta de sacarle a G todas las aristas de C y los puntos que quedan aislados tiene componentes conexas $G_1, \ldots, G_k$.

Por hipótesis de inducción existe en cada una de las componentes conexas G_i un circuito Euleriano c_i:

Por hipótesis de inducción existe en cada una de las componentes conexas G_i un circuito Euleriano c_i:



Construimos un circuito Euleriano en G de la siguiente manera:

Construimos un circuito Euleriano en G de la siguiente manera:

1. Comenzamos a recorrer C a partir de x_0.

Construimos un circuito Euleriano en G de la siguiente manera:

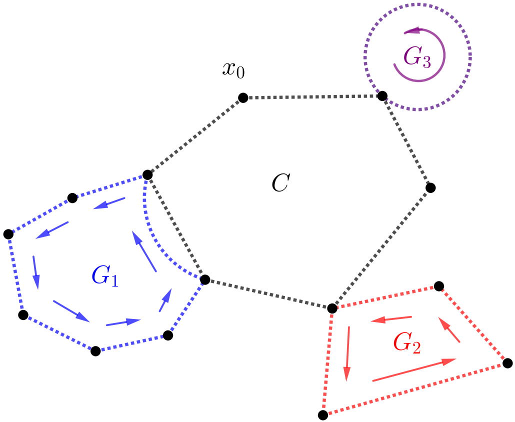
1. Comenzamos a recorrer C a partir de x_0.
2. Al encontrarnos con con el primer vértice de G_1 en C dejamos de lado C y recorremos el circuito c_1.

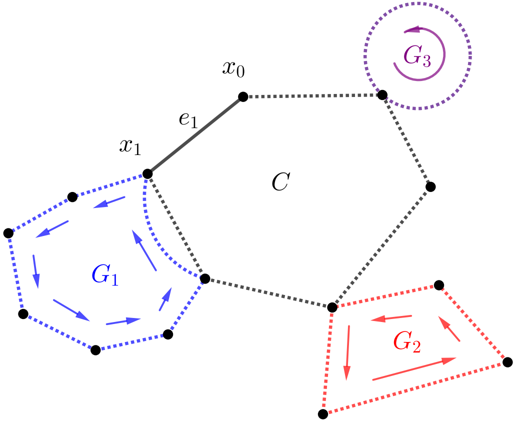
Construimos un circuito Euleriano en G de la siguiente manera:

1. Comenzamos a recorrer C a partir de x_0.
2. Al encontrarnos con con el primer vértice de G_1 en C dejamos de lado C y recorremos el circuito c_1.
3. Al terminar c_1 continuamos con C.

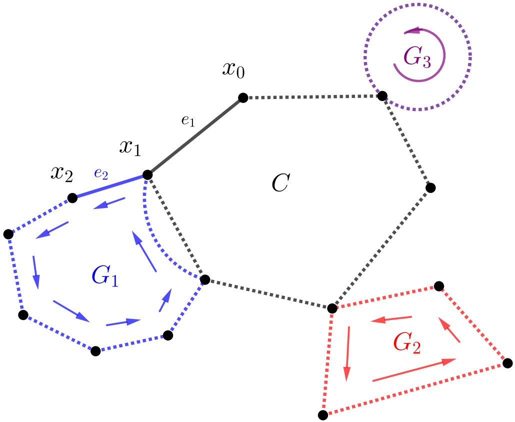
Construimos un circuito Euleriano en G de la siguiente manera:

1. Comenzamos a recorrer C a partir de x_0.
2. Al encontrarnos con con el primer vértice de G_1 en C dejamos de lado C y recorremos el circuito c_1.
3. Al terminar c_1 continuamos con C.
4. Hacemos lo mismo al llegar a cada componente conexa.

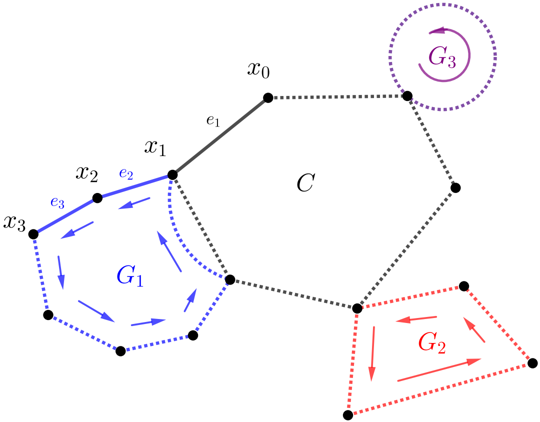

x_0
G_3
C
G_1
G_2



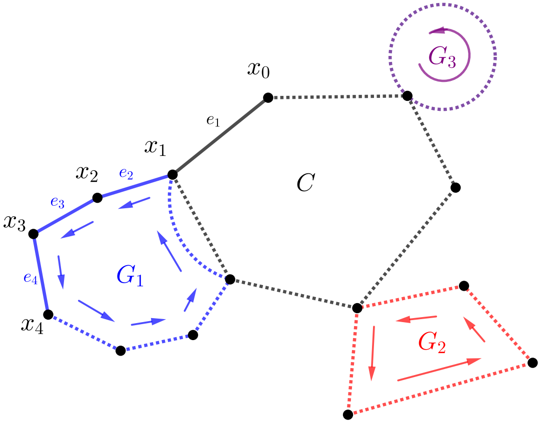
$(x_0, e_1, x_1$



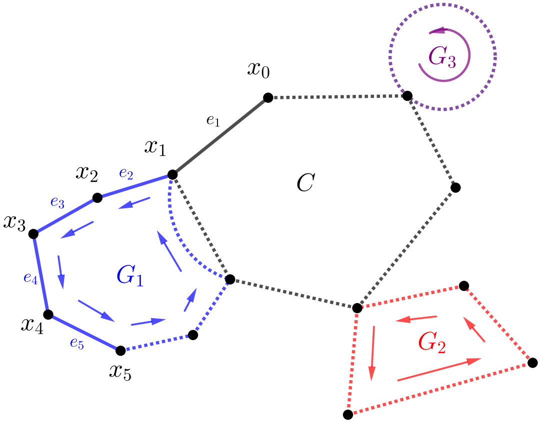
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2$



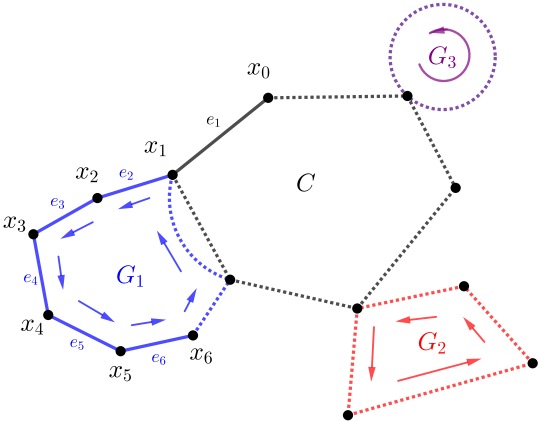
$$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3$$



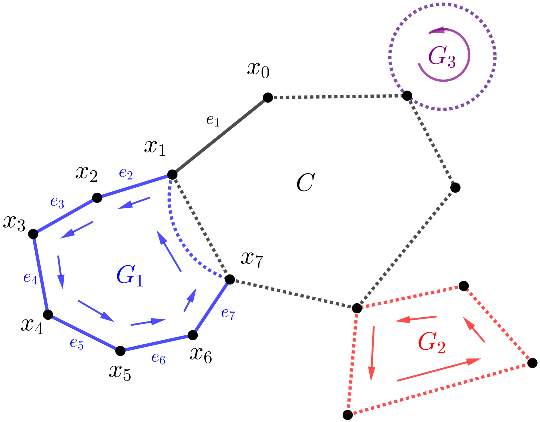
$$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4$$



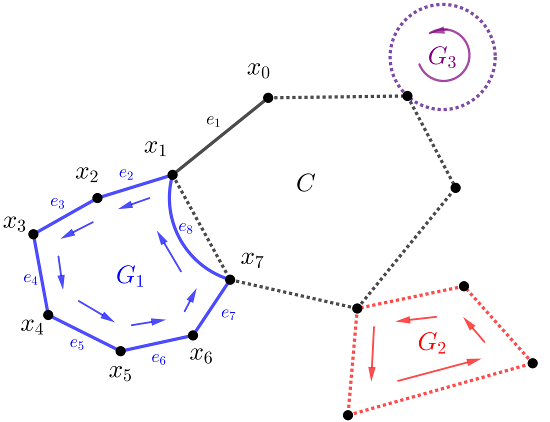
$$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5$$



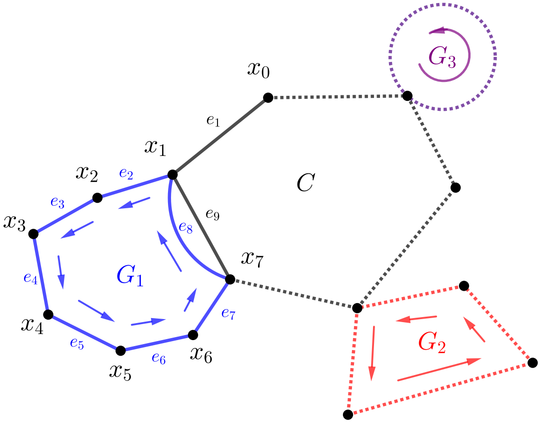
$$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6$$



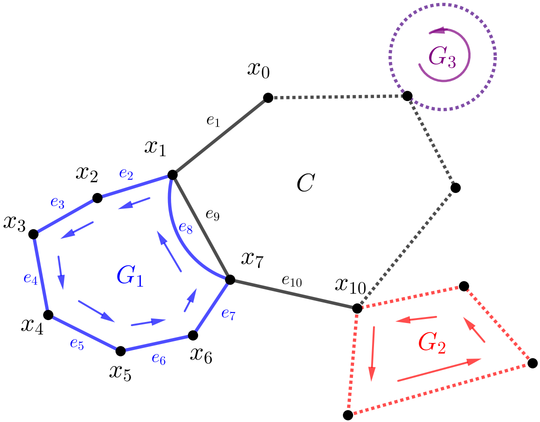
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7$



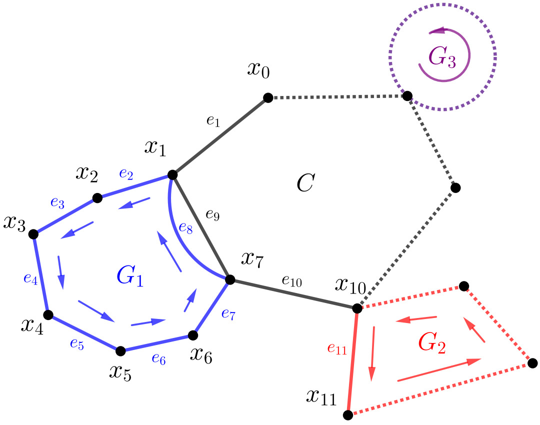
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1$



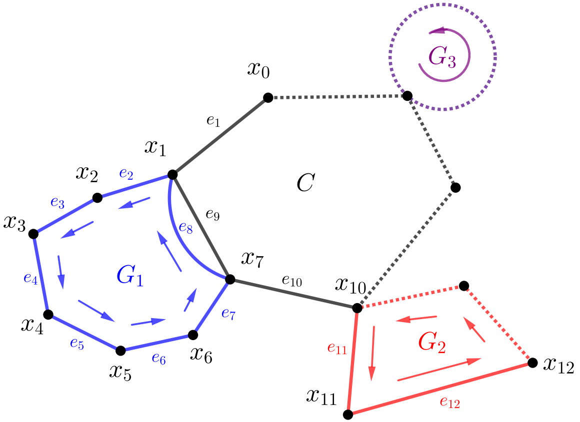
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$



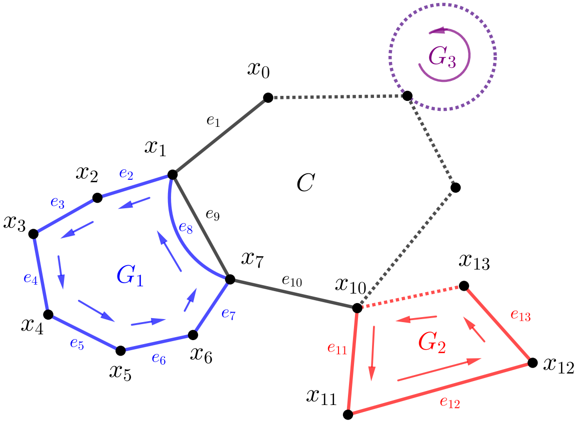
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
e_{10}, x_{10}



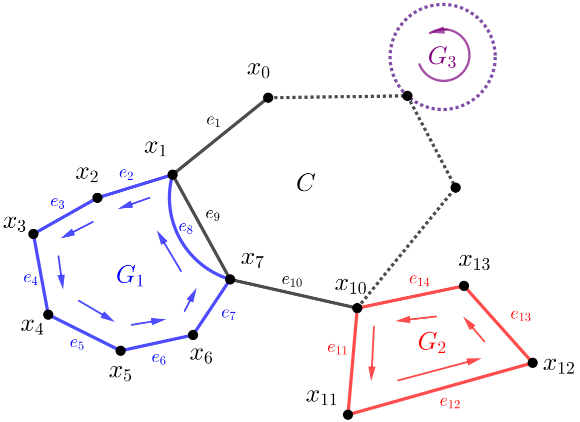
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}$



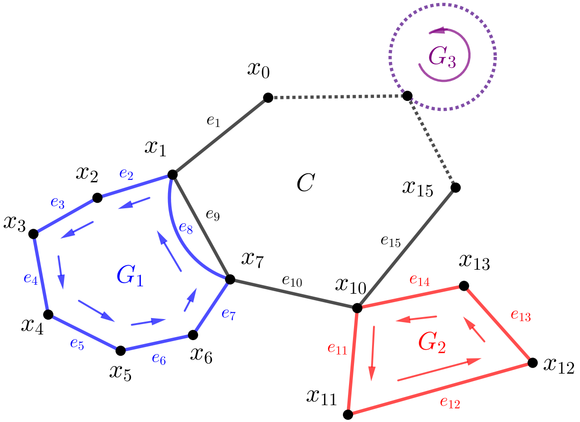
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}$



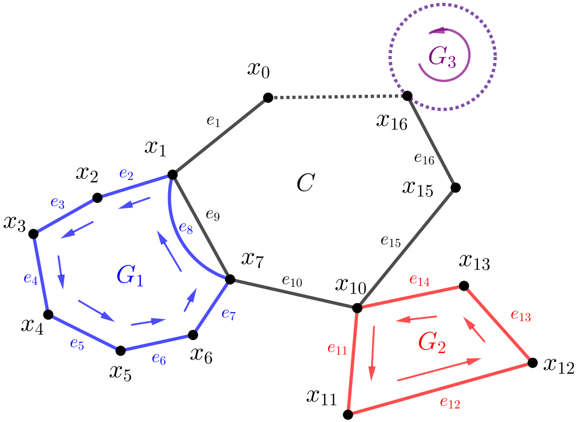
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}$



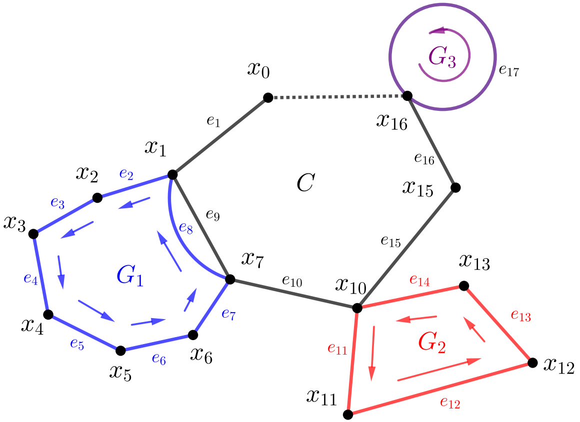
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}, e_{14}, x_{10}$



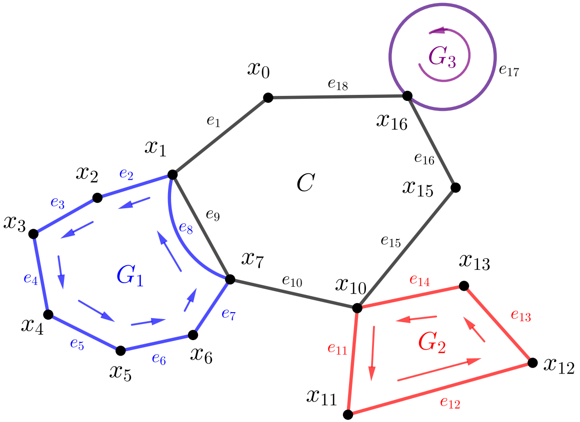
$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}, e_{14}, x_{10}, e_{15}, x_{15}$



$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7,$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}, e_{14}, x_{10}, e_{15}, x_{15}, e_{16}, x_{16},$



$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7,$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}, e_{14}, x_{10}, e_{15}, x_{15}, e_{16}, x_{16},$
e_{17}, x_{16}



$(x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, x_3, e_4, x_4, e_5, x_5, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_1, e_9, x_7,$
$e_{10}, x_{10}, e_{11}, x_{11}, e_{12}, x_{12}, e_{13}, x_{13}, e_{14}, x_{10}, e_{15}, x_{15}, e_{16}, x_{16},$
$e_{17}, x_{16}, e_{18}, x_0)$

Contents

Definición

Sea G un grafo. Un camino c en G es:

- un **camino Hamiltoniano** si es un camino simple que pasa por todos los vértices.
- un **ciclo Hamiltoniano** si además es cerrado.

Definición

Sea G un grafo. Un camino c en G es:

- un **camino Hamiltoniano** si es un camino simple que pasa por todos los vértices.
- un **ciclo Hamiltoniano** si además es cerrado.

Pregunta

¿Qué grafos admiten caminos o ciclos Hamiltonianos?

Definición

Sea G un grafo. Un camino c en G es:

- un **camino Hamiltoniano** si es un camino simple que pasa por todos los vértices.
- un **ciclo Hamiltoniano** si además es cerrado.

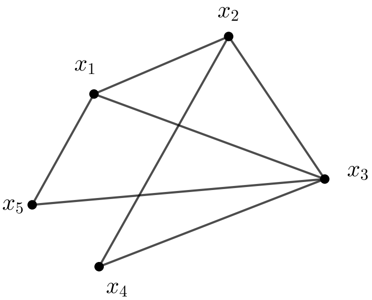
Pregunta

¿Qué grafos admiten caminos o ciclos Hamiltonianos?

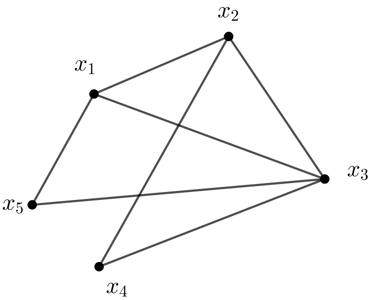
(Consideramos grafos y no multigrafos porque la existencia de aristas múltiples no cambia la existencia o no de dichos caminos)

Ejemplos

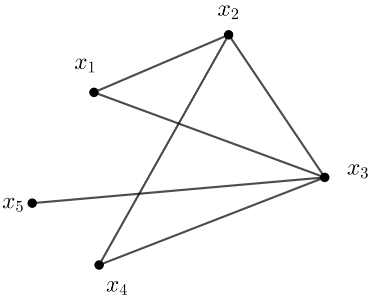
Ejemplos

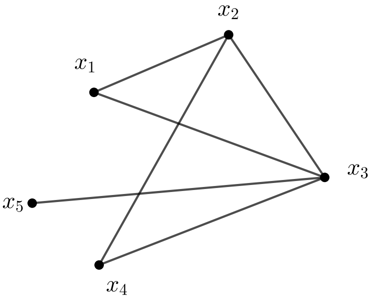


Ejemplos



Admite un ciclo Hamiltoniano $(x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_1)$. Luego también admite un camino Hamiltoniano abierto.

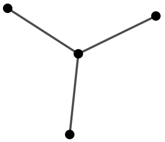

x_2
x_1
x_3
x_5
x_4



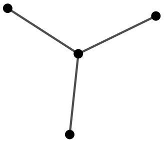
Este grafo admite un camino Hamiltoniano $(x_1, x_2, x_4, x_3, x_5)$, pero no admite un ciclo Hamiltoniano.

En el siguiente grafo no hay caminos Hamiltonianos:

En el siguiente grafo no hay caminos Hamiltonianos:

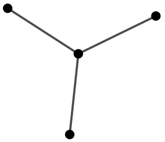


En el siguiente grafo no hay caminos Hamiltonianos:



En general no hay caminos Hamiltonianos si (por ejemplo):

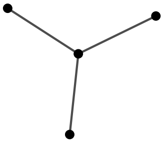
En el siguiente grafo no hay caminos Hamiltonianos:



En general no hay caminos Hamiltonianos si (por ejemplo):

- Al retirar algún vértice quedan más de dos componentes conexas.

En el siguiente grafo no hay caminos Hamiltonianos:



En general no hay caminos Hamiltonianos si (por ejemplo):

- Al retirar algún vértice quedan más de dos componentes conexas.
- Hay al menos tres vértices de grado 1.

Es natural pensar en la siguiente idea: cuantos más aristas tenga un grafo, o cuanto más grande sean los grados de los vértices, es más probable que exista un camino Hamiltoniano.

Es natural pensar en la siguiente idea: cuantos más aristas tenga un grafo, o cuanto más grande sean los grados de los vértices, es más probable que exista un camino Hamiltoniano.
En esa dirección va el siguiente resultado:

Teorema

Sea G un grafo sin lazos con n vértices.

Es natural pensar en la siguiente idea: cuantos más aristas tenga un grafo, o cuanto más grande sean los grados de los vértices, es más probable que exista un camino Hamiltoniano.
En esa dirección va el siguiente resultado:

Teorema

Sea G un grafo sin lazos con n vértices.

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*

Es natural pensar en la siguiente idea: cuantos más aristas tenga un grafo, o cuanto más grande sean los grados de los vértices, es más probable que exista un camino Hamiltoniano.
En esa dirección va el siguiente resultado:

Teorema

Sea G un grafo sin lazos con n vértices.

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*
2. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano.*

Contents

Un grafo es **plano** si admite una representación en el plano donde:

Un grafo es **plano** si admite una representación en el plano donde:

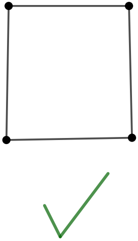
- los vértices son puntos, y

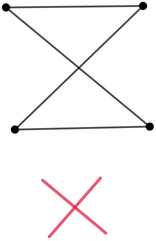
Un grafo es **plano** si admite una representación en el plano donde:

- los vértices son puntos, y
- las aristas son curvas que unen dichos puntos de forma tal que no hay dos de ellas que se intersecten.

Un grafo es **plano** si admite una representación en el plano donde:

- los vértices son puntos, y
- las aristas son curvas que unen dichos puntos de forma tal que no hay dos de ellas que se intersecten.





Pregunta

¿Qué grafos son planos?

Regiones

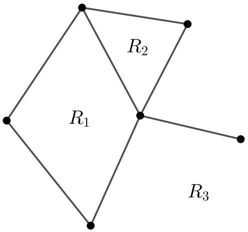
Sea G un grafo plano junto con una representación plana.

Regiones

Sea G un grafo plano junto con una representación plana. Los puntos del plano que no están en vértices ni aristas se encuentran distribuidos en **regiones**.

Regiones

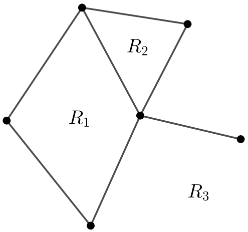
Sea G un grafo plano junto con una representación plana. Los puntos del plano que no están en vértices ni aristas se encuentran distribuidos en **regiones**.



$gr(R_1) = 4$
$gr(R_2) = 3$
$gr(R_3) = 7$

Regiones

Sea G un grafo plano junto con una representación plana. Los puntos del plano que no están en vértices ni aristas se encuentran distribuidos en **regiones**.

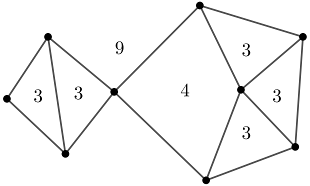


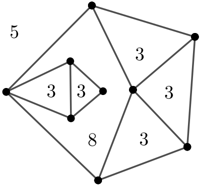
$gr(R_1) = 4$
$gr(R_2) = 3$
$gr(R_3) = 7$

El **grado** de una región es la cantidad de aristas que la delimitan.

¡Ojo!: El grado de las regiones depende de la representación elegida y no solo del grafo.

¡Ojo!: El grado de las regiones depende de la representación elegida y no solo del grafo.





Sin embargo, el número de regiones no depende de la representación plana, pues tenemos el siguiente teorema:

Sin embargo, el número de regiones no depende de la representación plana, pues tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Característica de Euler)

Sea $G = (V, E)$ *un grafo plano conexo. Fijamos una representación en el plano de* G *y notamos por* r *al número de regiones. Entonces*

$$\#V - \#E + r = 2.$$