Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 7: Grafos planos

1. Sea G un grafo y $\mathcal{G}$ una familia cualquiera de grafos.

   a) Probar que la relación $\leq$ definida en $\mathcal{S}(G)$ el conjunto de subgrafos de G definida por
   $$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2$$
   es una relación de orden. Estudiar elementos maximales y minimales.

   b) Probar que el isomorfismo define una relación de equivalencia en $\mathcal{G}$.

   c) Observar que la relación $\preceq$ definida por
   $$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{ existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2$$
   No es una relación de orden.
   Sin embargo, si $\cong$ es la relación de isomorfismo en $\mathcal{G}$, entonces la relación
   $$[G_1] \sqsubseteq [G_2] \Leftrightarrow G_1 \preceq G_2$$
   esta bien definida en el cociente $\mathcal{G}/\cong$ y es una relación de orden.

2. Probar que K_4 y $K_{2,3}$ son planos. Hallar las regiones determinadas por las representaciones encontradas y sus grados.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G?

4. Sea G un grafo plano donde $a = a(G)$ es la cantidad de aristas de G. Fijemos una representación plana de G.

   a) Probar que $2a = \sum_R gr(R)$. (La suma se hace en el conjunto de todas las regiones.)

   b) Para cada $n \geq 2$, sea r_n la cantidad de regiones de grado n. Reescribir la fórmula de arriba relacionando a con las r_n

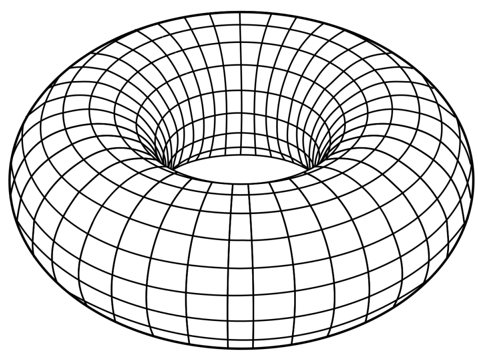
5. Mostrar que la fórmula de Euler no vale si G no es conexo. Adaptar la fórmula al caso disconexo agregando como parámetro el número de componentes conexas. Demostrar la fórmula escrita en base a la fórmula de Euler para grafos conexos.

6. Mostrar que si se elimina cualquier arista de K_5, el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

7. Probar que un grafo plano tiene al menos un vértice de grado menor o igual a 5.
8. Sea G' un subgrafo de G. Probar que si G' no es plano, entonces G tampoco lo es. Deducir que K_6 no es plano.
9. Supongamos que G' se obtiene de G a través de subdivisiones elementales sucesivas. Probar que si G no es plano, G' tampoco lo es.
10. El toro es la superficie de revolución que se obtiene al rotar el círculo

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

alrededor del eje z.



Decimos que un grafo es **tórico** si admite una representación en el toro.

a) Mostrar que $K_{3,3}$ y K_5 son grafos tóricos.

b) Cálcular la característica de Euler en el toro.

c) Investigar:

1) Si existen grafos que no sean tóricos.

2) Si dado un grafo cualquiera G, existe una superficie S tal que G admite una representación en S.

11. Dibujar en el plano el grafo determinado por los cascos hexagonales y pentagonales en una pelota de futbol clásica.
12. Determinar cuántos isomorfismos de la forma $f : G \to G$ existen para G cada uno de los solidos platónicos.

Quinta entrega: se pide entregar el ejercicio 5 antes del sábado 25 de julio.