Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre 2018

Examen
Febrero de 2019
Duración: 3 horas

1. (60 puntos) Sea G un grupo de orden $9 \times 5 \times 17$.

   a) Probar que G tiene un único subgrupo 17-Sylow.

   b) Sean R el subgrupo 17-Sylow de G y Q un subgrupo 5-Sylow de G. Probar que RQ es un subgrupo de G y que Q es el único subgrupo 5-Sylow de RQ.

   c) Probar que $[G : N_G(Q)] \leq 9$ y concluir que Q es el único 5-Sylow de G.

   d) Probar análogamente que si S es un 3-Sylow de G, $[G : N_G(S)] \leq 5$ y S es el único 3-Sylow de G.

   e) Probar que G es abeliano y determinar, salvo isomorfismos, los grupos de orden $9 \times 5 \times 17$.

2. (40 puntos) Sea $\xi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

   a) Hallar el polinomio mínimo de ξ sobre $\mathbb{Q}$.

   b) Probar que $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

   c) Probar que la extensión $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\xi)$ es de Galois y describir su grupo de Galois como producto de grupos cíclicos.