

Examen
Marzo de 2019
Duración: 3 horas

1. Se dice que un subgrupo H de un grupo G es un *subgrupo característico* de G si $\phi(H) = H$ para todo automorfismo $\phi : G \rightarrow G$.
 - a) Probar que todo subgrupo característico de G es normal en G .
 - b) Sean N un subgrupo característico de G y H un subgrupo característico de N . Probar que H es un subgrupo característico de G .
 - c) Hallar un ejemplo de un subgrupo normal en un grupo G que no sea un subgrupo característico de G .
2.
 - a) Probar que todo grupo de orden $20449 = 11^2 \cdot 13^2$ es abeliano.
 - b) ¿Cuántos grupos (salvo isomorfismos) de orden 20449 hay?
3. Sea $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$, y sea \mathbb{Q}_f su cuerpo de descomposición sobre \mathbb{Q} .
 - a) Hallar la dimensión de \mathbb{Q}_f sobre \mathbb{Q} .
 - b) Sea G el grupo de Galois de f sobre \mathbb{Q} . Probar que G es abeliano y escribirlo como suma directa de grupos cíclicos.
 - c) Hallar todos los cuerpos K tales que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}_f$.