Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois

Examen de Julio (curso 2019)

1. Un subgrupo *característico* de un grupo G es un subgrupo H tal que $\alpha(H) = H$, $\forall \alpha \in Aut(G)$. Lo anotaremos como $H \lhd_C G$.

   a) (P 3 E 5a) Probar que si H es caraterístico entonces es normal.

   b) (P 3 E 5b) Mostrar que el conmutador $[G, G]$ y el centro $Z(G)$ son subgrupos característicos de G.

   c) Mostrar que $H \lhd_C \mathbb{Z}^n$ si y sólo si $H = m\mathbb{Z}^n$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.

2. (P 5 E 12) Sea G un grupo de orden 36.

   a) Si G es simple, probar que existen dos 3-subgrupos de Sylow distintos cuya intersección es no trivial.

   b) Si G es simple y $H \neq \{1\}$ es un subgrupo de un 3-subgrupo de Sylow S de G, probar que $N_G(H) = S$.

   c) Deducir que no hay grupos simples de orden 36.

3. (P 7 E 12) Sea p un primo impar y sea $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\zeta)$ el cuerpo de descomposición de $X^p - 1$ sobre $\mathbb{Q}$, donde ζ es raíz de $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$. Denotamos $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\zeta) \cong \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}_{p-1}$.

   a) Probar que $\sum_{\sigma \in G} \sigma(\zeta) = -1$.

   b) Sea H el subgrupo de G de índice 2, y sean $\alpha = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\zeta)$ y $\beta = \sum_{\sigma \in G - H} \sigma(\zeta)$.
   Probar que α y β están fijos por H, y que cualquier $\sigma \in G - H$ los intercambia.
   Concluir que α y β son raíces de $X^2 + X + \alpha\beta \in \mathbb{Q}[X]$.

   c) Mostrar que $\mathrm{Fix}(H) = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha - \beta)$.