Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois

Examen de Febrero 2020

1. *a*) (P. 4, E. 5a) Probar que la cantidad de r-ciclos en S_n es $\frac{1}{r}\frac{n!}{(n-r)!}$.
   b) (P. 4, E. 6a) Calcular el número de conjugados de $\sigma = (12)(34)$ en S_n, $n \geq 4$.
   c) Hallar el centralizador $C_{S_n}(\sigma)$ de $\sigma = (12)(34)$, indicando su orden y clase de isomorfismo. ($n \geq 4$. Se sugiere hacerlo primero con $n = 4$).

2. *a*) (P. 2, E. 6a) Sea G un grupo cíclico, y sean a y b dos generadores de G. Probar que existe un automorfismo φ de G tal que $\varphi(a) = b$. Recíprocamente, si φ es un automorfismo de G, probar que $\varphi(a)$ es un generador de G.
   b) (P. 2, E. 6b) Probar que $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_n \cong U(n)$, para $n \in \mathbb{Z}^+$, donde $U(n)$ es el grupo de invertibles de $\mathbb{Z}_n$ con la multiplicación. Mostrar que $U(5) \cong \mathbb{Z}_4$.
   c) Clasificar los grupos de orden 10.

3. (P. 7, E. 10)
   a) Probar que si $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ y $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ son extensiones de Galois, y todo $\sigma \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{K}}\mathbb{F}$ se extiende a un automorfismo de $\mathbb{E}$, entonces $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}$ es Galois.
   b) Mostrar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ son de Galois, pero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ no lo es.