Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen teórico. 13/08/2020.

1. (**25 puntos**)

   a) Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G.

      1) Definir coclases izquierdas de G respecto a H.
      2) Probar que dos coclases izquierdas siempre tienen la misma cantidad de elementos.

   b) Enunciar y probar el teorema de Lagrange.

2. (**25 puntos**) Sea G un grupo finito y p un número primo.

   a) Definir p-grupo.

   b) Probar si G es un p-grupo, entonces su centro no es trivial.

   c) Probar que si $|G| = p^n k$, con $p \nmid k$, entonces G tiene un subgrupo de orden p^n.

3. (**25 puntos**) Sea F/K una extensión de cuerpos y $u \in F$.

   a) Definir qué quiere decir que u sea algebraico o trascendente sobre K. Dar ejemplos de cada uno de los casos.

   b) Sea $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que si $u, v \in F$ son raíces de f, entonces existe un único K-isomorfismo $\sigma : K(u) \to K(v)$ tal que $\sigma(u) = v$.

4. (**25 puntos**)

   a) Definir qué quiere decir que una extensión de cuerpos sea de Galois.

   b) Dar un ejemplo de una extensión que es de Galois y de una que no lo es, justificando la respuesta.

Nota. En lo anterior se deben de justificar todas las afirmaciones. Si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."