Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y teoría de Galois
Primer semestre 2020

Examen teórico. 12/02/2021.

1. (**25 puntos**) Sea G un grupo que actúa en un conjunto X.

   a) Sea $x \in X$ y consideramos su órbita $o(x)$ y su estabilizador G_x. Probar que $o(x)$ y G/G_x son isomorfos como G-conjuntos, con una ación de G en G/G_x que se definirá.

   b) Probar que si la acción no es trivial, entonces existen elementos $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$|X| = \left|X^G\right| + \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}], \text{ con } [G : G_{x_i}] > 1, \ \forall i = 1, \dots, n.$$

2. (**25 puntos**) Probar que si G es un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$, entonces G contiene algún subgrupo de orden p.

3. (**25 puntos**) Sea F/K una extensión y $u \in F$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   a) u es algebraico sobre K.

   b) $K(u)/K$ es finita.

   Se puede asumir como probado que u es algebraico sobre K si y solo si $K[u] = K(u)$.

4. (**25 puntos**) Probar.

   a) Toda extensión finita es algebraica.

   b) Una extensión es finita si y solo si está finitamente generada por elementos algebraicos.

Nota. En lo anterior se deben de justificar todas las afirmaciones. Si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."