Ejercicios para el Segundo Parcial

1. La variable aleatoria X tiene distribución discreta y toma los valores $0, 1, 2$ y 4, con probabilidades $1/2, 1/4, 1/8$ y $1/8$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria, y dibujar el gráfico de $y = F(x)$.

2. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 2)$.
(a) Hallar la función de distribución y su densidad. Dibujar los gráficos correspondientes.
(b) Calcular $\mathbf{P}(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5)$.

3. La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$. (a) Calcular $\mathbf{P}(X \leq 0)$; (b) hallar el valor de la constante c; y (c) calcular $\mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)$.

4. La variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de c. (b) Hallar la función de distribución de X, y (c) calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0{,}1 < X < 0{,}4)$.

5. Una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$, se denomina *distribución de Rayleigh*. Hallar la densidad de esta variable aleatoria, y calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0 \leq X \leq \sigma)$.

6. Verificar, que la función dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, & x > b, \\ 0, & x < b. \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas, es la densidad correspondiente una variable aleatoria, y calcular su función de distribución correspondiente. (Esta distribución se denomina *distribución de Pareto*.)

7. El vector aleatorio (X, Y) tiene distribución discreta, dada en la siguiente tabla:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0,2	0	0,1	0
1	0,1	0,2	0,1	0
2	0	0,1	0,1	0,1

donde se indican las probabilidades $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$, de forma que, por ejemplo, $\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = 0{,}1$. Hallar $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, y la función de distribución de la variable aleatoria X.

8. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante. Hallar: (a) el valor de c; (b) la función de distribución de la variable aleatoria X; (c) la función de distribución de la variable aleatoria Y; (d) las densidades de las variables aleatorias X e Y.

9. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante. (a) Hallar el valor de c. (b) ¿Resultan independientes las variables aleatorias X e Y?

10. La duración en horas de un cierto tipo de lámpara es una variable aleatoria que tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}001e^{-0{,}001x} & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Se elijen al azar 3 lámparas de una cierta partida. Calcular las probabilidades de que: (a) ni una de las lámparas se tenga que cambiar en el transcurso de las primeras 1000 horas; (b) las tres lámparas tengan que ser cambiadas en el mismo lapso de tiempo.

11. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ y densidad $p(x)$. Hallar la función de distribución y la densidad de la variable aleatoria $Y = aX + b$, donde $a > 0$ y b son constantes.

12. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = 2X - 1$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(-1, 1)$.

13. Consideremos una variable aleatoria Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F, tiene función de distribución $F(x)$.

14. Las variables aleatorias X e Y son independientes, y tienen la misma densidad, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Demostrar que la variable aleatoria $X + Y$ tiene densidad, dada por

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

15. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de μ y de σ en forma simultánea en el caso normal.

16. Hallar los estimadores de máxima verosimilitud de a y b a partir de una m.a.s. de variables uniformes en $[a, b]$

17. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de α a partir de una m.a.s. de variables exponenciales de parámetro α.

18. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de λ a partir de una m.a.s. de variables con distribución de Poisson de parámetro λ.

19. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a, b). Hallar $\mathbf{E}X$, $\mathbf{var}X$ y $\mathbf{E}(X^3)$.

20. Sea X una variable aleatoria con distribución discreta, que toma, con probabilidad $1/n$, cada uno de los valores $1, 2, \ldots, n$. Calcular $\mathbf{var}X$.

21. Consideremos una variable aleatoria X con distribución exponencial, con parámetro $\alpha > 0$. Calcular $\mathbf{E}X$, $\mathbf{var}X$.

22. Sea X una variable aleatoria que toma únicamente valores enteros no negativos. Demostrar que $\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$.

23. Sea X una variable aleatoria para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria cumple que $\lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) = 0$.

24. Sea X una variable aleatoria no negativa para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que $\mathbf{E}X = \int_0^\infty (1-F(x))dx$, donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

25. Sea X una variable aleatoria para la cual existe esperanza matemática $\mathbf{E}X$. Demostrar que

$$\mathbf{E}X = -\int_{-\infty}^{0} F(x)dx + \int_0^\infty (1-F(x))dx,$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

26. Sea X una variable aleatoria. Demostrar que si $\mathbf{E}|X|^r < \infty$ para algún $r > 0$, entonces

$$\mathbf{E}|X|^r = r\int_0^\infty \mathbf{P}(|X| \geq x)x^{r-1}dx.$$

27. La variable aleatoria X tiene *distribución de Laplace*, si su densidad es

$$p(x) = \frac{1}{2b}e^{-|x-a|/b},$$

donde $b > 0$ y a son constantes. Hallar $\mathbf{E}X$ y $\mathbf{var}X$.

28. La densidad de la magnitud de la velocidad absoluta de una molécula tiene la forma

$$p(x) = \frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\alpha^2}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$ (*distribución de Maxwell*). Hallar la velocidad media de una molécula y su varianza.

29. Consideremos una variable aleatoria X con distribución normal con parámetros (a, σ). Demostrar que la variable aleatoria $Y = e^X$ tiene densidad dada por

$$p(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln y-a)^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{si} \quad x > 0,$$

y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$ (la distribución con esta densidad se denomina *lognormal*). Hallar $\mathbf{E}Y$ y $\mathbf{var}Y$ en el caso $a = 0$, $\sigma = 1$.

30. *El problema de tomar de más.* Una persona quiere abrir una puerta, y tiene n llaves de las cuales solo una corresponde a la cerradura. La persona va eligiendo las llaves al azar y probando abrir la puerta. Calcular la esperanza matemática y la varianza del número de intentos cuando la persona elige cada vez entre las n llaves.

31. Sea $f(x)$ una función definida en la recta real, no negativa y no decreciente, y sea X una variable aleatoria tal que existe $\mathbf{E}f(X)$. Demostrar la desigualdad $\mathbf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{f(x)}\mathbf{E}f(X)$ para todo x real.

32. Calcular la mediana de una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha = 1$.

33. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y), & \text{si } 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $\mathbf{E}X$ y $\mathbf{E}Y$.