Matemática Discreta

Notas del curso 2020[1]

Facultad de Ciencias - UdelaR

[1]Dictado por Emiliano Sequeira y Leandro Bentancur.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares: Conjuntos y Funciones

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) a partir de las cuales se prueban todos los teoremas. En esta parte del curso trabajaremos de manera un poco informal y no especificaremos los axiomas de la teoría. Así por ejemplo mostraremos construcciones de cierto conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría. Se sugiere a quienes quieran profundizar en este punto que revisen los axiomas dados en el Apéndice A y hagan el ejercicio por ellos mismos. Referimos también a [H] para profundizar en estos temas.

1.1. Primeras definiciones

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos que poseen una propiedad en común. A estos objetos los llamaremos **elementos**. Escribiremos $x \in X$ para indicar que x pertenece a X.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si tienen los mismos elementos. Esto nos dice que en principio para definir un conjunto debemos decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto enumerandolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad determinada. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión** o **especificación**.

Ejemplos 1.1.1. Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,

- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto A está **contenido** o **incluido** en otro conjunto B si para todo $x \in A$ se tiene $x \in B$. También diremos en este caso que A es **subconjunto** de B o que B **contiene** a A y lo escribiremos $A \subset B$. Observar que $A \subset B$ y $B \subset A$ implica que $A = B$. Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

También escribiremos $A \not\subset B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está contenido en B pero estos conjuntos no son iguales.

El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es un conjunto que no tiene elementos. Obervar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset X$.

1.1.1. Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto C contiene a A y a B, entonces $A \cup B \subset C$.

Proposición 1.1.2. *La unión de conjuntos es asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Demostración. Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.

De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3). $\square$

La Proposición 1.1.2 permite dar una definición para la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$. Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} = \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C},$$

donde $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$.

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia indexada de conjuntos (esto quiere decir que para cada $i \in I$ se tiene un conjunto A_i, más tarde se dará una definición más formal), definimos su unión por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$. Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ejemplo 1.1.3. Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de números primos, luego

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

1.1.2. Intersección y resta de conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, definimos:

- su **intersección**: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$,
- y su **resta**: $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.

Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa, es decir que $A \cap B = B \cap A$; sin embargo la resta no lo es.

Ejemplo 1.1.4. Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $A \subset X$, entonces definimos el **complemento** de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$.

Ejercicio 1.1.5. Probar que:

1. Si $A, B \subset X$, entonces $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subset B \subset X$, entonces $B^c \subset A^c$ (tanto A^c como B^c son los complementos en X).

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección es definida por

$$\bigcap \mathcal{C} = \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} C_i.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos A_p como en el Ejemplo 1.1.3, tenemos

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Ejercicio 1.1.6. (Leyes de De Morgan)

1. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto C. Expresar $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$ en términos de A^c y B^c.
2. Generalizar lo anterior a una cantidad cualquiera de conjuntos.

1.1.3. El conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales puede construirse a partir del conjunto vacío de la siguiente forma:

$$0 := \emptyset; \ 1 := \{\emptyset\}; \ 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \ 3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \ \cdots .$$

En general se define $n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. De esta forma el orden en $\mathbb{N}$ queda determinado por la pertenencia o la inclusión, es decir que se tiene:

$$n < m \Leftrightarrow n \in m \Leftrightarrow n \subset m.$$

1.1.4. Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ b \in B\},$$

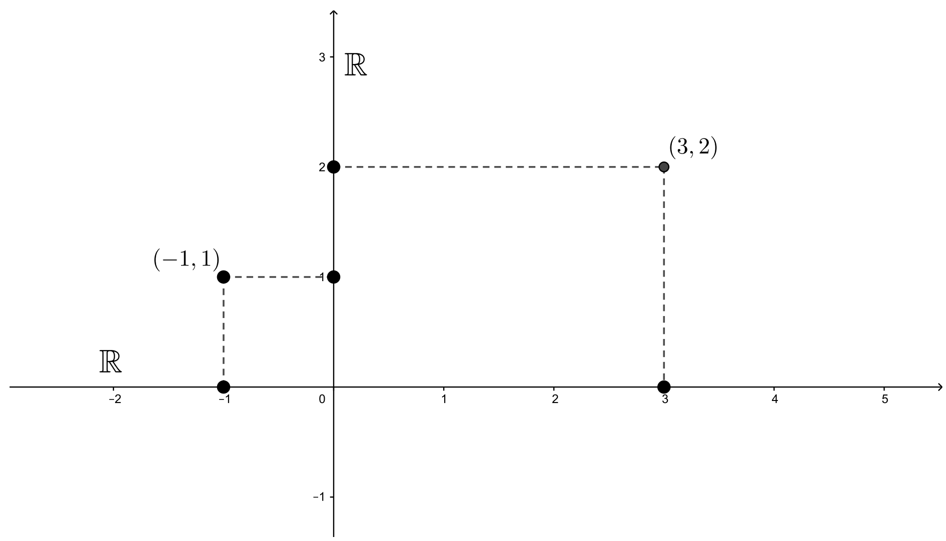
donde (a, b) es el par ordenado de los elementos a y b. Observar que como se trata de pares ordenados el producto cartesiano no es conmutativo.

Ejemplos 1.1.7. 1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.

2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con si misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.



Definimos la **unión disjunta** de dos conjuntos A y B por

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

De esta forma A se identifica con el subconjunto $A \times \{0\}$ y B con el subconjunto $B \times \{1\}$.

Ejemplos 1.1.8. 1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, entonces

$$A \sqcup B = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 1), (6, 1), (7, 1)\}.$$

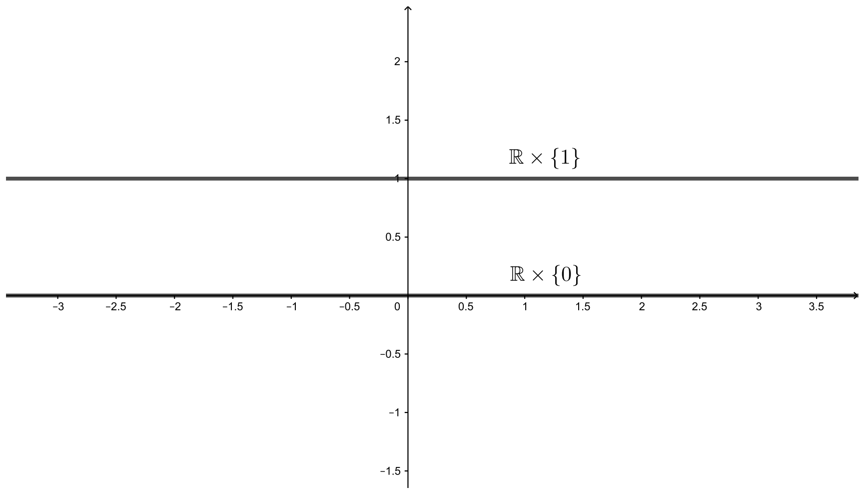
Este puede verse como el conjunto $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Definimos el **conjunto de los números enteros** por

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{N},$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Identificamos aquí el conjunto de los naturales con los elementos de la forma (n,1), y los números negativos con los pares de la forma $(n, 0)$. Usualmente se nota $n = (n, 1)$ y $-n = (n, 0)$.

3. La unión disjunta de la recta real con si misma puede verse como la unión de dos rectas paralelas en el plano:



1.2. Funciones

Fijemos dos conjuntos A y B. Se llama **relación** de A a B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una **función** de A a B es una relación $f \subset A \times B$ que cumple que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** al conjunto B.

Escribimos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A a B.

Ejemplos 1.2.1. 1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía.

2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en X por

$$id_X : X \to X, \ id_X(x) = x \ \ \forall x \in X.$$

3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por

$$i : A \to B, \ i(a) = a \forall \ \ a \in A.$$

Si $A = B$, entonces i no es otra cosa que la identidad.

4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es

$$f : A \to B, f(a) = b_0 \ \ \forall a \in A.$$

5. Una **sucesión** en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Usualmente escribiremos $f(n) = x_n$. Por ejemplo podemos considerar la sucesión de naturales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = x_n = n^2$.

6. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, podemos considerar una función $f|_A : A \to Y$ definida por $f|_A(x) = f(x)$. A esta le llamamos **restricción** de f a A.

1.2.1. Conjunto de imágenes y preimágenes

Tomemos $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$, $B \subset Y$. Definimos

- El conjunto **imagen** de A por f como $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset Y$.
- El conjunto **preimagen** de B por f como $f^{-1}(B) = \{a \in X : f(a) \in B\}$.

También diremos **imagen** de f para referirnos al conjunto $f(X)$.

Ejercicio 1.2.2. Probar que dadas una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

1.2.2. Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si $f(x) = f(x')$ se da sólo si $x = x'$.

Ejemplos 1.2.3.

1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.
2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.
3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.
4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva pues $f(-1) = f(1)$.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplos 1.2.4.

1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.
2. Una función constante no es sobreyectiva salvo que su codominio sea un conjunto unitario.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio 1.2.5. Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y sólo si f es inyectiva.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

1.2.3. Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su **composición** es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to X$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**.

Ejercicio 1.2.6. Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Probar que

1. si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
3. si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

La siguiente proposición da una caracterización de las funciones biyectivas.

Proposición 1.2.7. *Tomemos una función $f : X \to Y$. Entonces:*

(i) f es invertible si y sólo si es biyectiva.

(ii) Si f tiene inversa, entonces esta es única.

Demostración. (i) $(\Leftarrow)$ Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva, para esto supongamos que $f(x) = f(x')$, luego

$$x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'.$$

Concluimos entonces que f es inyectiva.

Observar que si $y \in Y$, entonces $f(g(y)) = y$, es decir que y está en la imagen de f. Luego f es sobreyectiva.

$(\Rightarrow)$ Ahora supongamos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f.

(ii) Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego

$$g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y).$$

□

Si f es biyectiva (y por tanto invertible), notaremos por f^{-1} a su inversa.

Una función $f : A \to B$ es **invertible a izquierda** si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por otro lado decimos que f es **invertible a derecha** si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.

Ejercicio 1.2.8. Probar que una función

1. es invertible a izquierda si y sólo si es inyectiva.
2. es invertible a derecha si y sólo si es sobreyectiva.

1.2.4. Familias indexadas de conjuntos

Una **familia indexada de conjuntos** es una colección de conjuntos $\mathcal{C}$ junto con una función sobreyectiva $f : I \to \mathcal{C}$, donde I es un conjunto a cual llamaremos **conjunto de índices**. Usaremos la notación

$$\{C_i\}_{i \in I}$$

para referirnos a una familia de conjuntos indexada por I. En este caso $C_i = f(i)$.

Observar que si por ejemplo la colección $\mathcal{C}$ tiene un sólo conjunto C, entonces $\{C_i\}_{i \in I}$ es una forma de tomar tantas copias del conjunto C como elementos tenga I.

1.2.5. Productos cartesianos

Recordemos la definición de producto cartesiano que vimos anteriormente. Observar que un par ordenado (a, b) puede verse como una función $f : \{0, 1\} \to A \cup B$, $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Luego $A \times B$ puede ser visto como el conjunto de todas las funciones $f : \{0, 1\} \to A \cup B$ que cumplen $f(0) \in A$ y $f(1) \in B$. Esto inspira la siguiente definición:

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de conjuntos. Definimos su **producto cartesiano** como el conjunto

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i : f(i) \in A_i \right\}.$$

Si $A_i = A$ para todo $i \in I$, entonces notaremos

$$\prod_{i \in I} A_i = A^I,$$

que es simplemente el conjunto de todas las funciones de I en A. Así por ejemplo $X^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones en X.

Ejercicio 1.2.9. Probar que existe una función biyectiva entre $\mathcal{P}(X)$ y $\{0, 1\}^X$.

El *axioma de elección* dice que el producto de una familia no vacía de conjunto es no vacío (ver el Apéndice A). Esto equivale a decir que es posible elegir un elemento de cada conjunto. Este es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos clásica, notada por ZF (Zermelo-Fraenkel), por lo que su inclusión da lugar a una teoría diferente que se nota por ZFC (la C es por *choice*). La formulación que hemos dado del axioma de elección puede resultar muy intuitiva y deseable, sin embargo es equivalente a otras formulaciones que no lo son tanto. En adelante no nos haremos problema con esto y lo supondremos cierto.

Capítulo 2

Números naturales y principio de inducción

En este capítulo trabajaremos con el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, entendiendo este como un conjunto que cumple los siguientes condiciones:

1. Existe un elemento de $\mathbb{N}$ al que llamamos **cero** y denotamos por 0.
2. Existe una función inyectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Llamamos a $s(n)$ el **sucesor** de n.
3. **Principio de inducción (PI):** si $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto que contiene al cero y que cumple $s(A) \subset A$, entonces $A = \mathbb{N}$.

Las condiciones anteriores se conocen como *axiomas de Peano* y dan lugar a la teoría axiomática de los números naturales. Una forma alternativa de trabajar con los números naturales es definiendo un modelo de $\mathbb{N}$ detro de la teoría de conjuntos, es decir, dar una definición explícita de $\mathbb{N}$ a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y pobar que dicho conjunto cumple con los axiomas de Peano (ver Secciones 1.1.3 y A.6).

El principio de inducción admite la siguiente formulación equivalente:

Principio de Inducción Matemática (PIM): Sea P una propiedad tal que

- 0 cumple P; y
- si n cumple P, entonces $s(n)$ cumple P.

Entonces todo número natural cumple la propiedad P.

Proposición 2.0.1. $PI \Leftrightarrow PIM$

Demostración. Primero supongamos que se cumple PI y que tenemos una propiedad P que es satisfecha por el cero y que si n satisface P, entonces también $s(n)$ satisface P. Definimos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ satisface } P\}.$$

Luego es claro que $0 \in \mathbb{N}$ y que $s(A) \subset A$, así que $A = \mathbb{N}$ por PI y por lo tanto todo número natural satisface P.

Por otro lado, ademitiendo PIM, si $A \in \mathbb{N}$ contiene al cero y se cumple $s(A)$, podemos considerar la pertenencia al conjunto A como nuestra propiedad P. Luego se ve claramente que $A = \mathbb{N}$. □

Observar en la demostración anterior que si tenemos una propiedad P que tiene sentido para números naturales a partir de $1 = s(0)$ (más precisamente podríamos decir: los naturales diferentes de cero), entonces podemos considerar la propiedad $\tilde{P}$ de forma tal que un natural cumple $\tilde{P}$ si es cero o si cumple P. Se puede entonces considerar PIM para la propiedad $\tilde{P}$, lo que permite concluir que la propiedad P es satisfecha por cualquier natural que no sea cero.

2.1. Operaciones en $\mathbb{N}$

Definimos la **suma** de la siguiente forma:

- $n + 0 = n$.
- $n + s(m) = s(n + m)$.

Esto nos da una función $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Observar que si notamos $1 = s(0)$, entonces $n + 1 = s(n + 0) = s(n)$. Muchas veces usaremos la notación $n + 1$ en lugar de $s(n)$.

Proposición 2.1.1. *La suma es conmutativa ($n+m = m+n$) y asociativa ($(n+m)+k = n + (m + k)$).*

Demostración. Probamos primero por inducción la asociatividad. Consideramos el conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{N} : (n + m) + k = n + (m + k) \; \forall n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- $\underline{0 \in \mathbb{N}}$: $(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0)$.
- $\underline{s(A) \subset A}$: Supongamos que $k \in A$, es decir, $(n+m)+k = n+(m+k)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Luego

  $$(n+m)+s(k) = s((n+m)+k) = s(n+(m+k)) = n+s(m+k) = n+(m+s(k)).$$

Luego por el principio de inducción $A = \mathbb{N}$.

Probemos ahora la conmutatividad. Para esto definimos el conjunto

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n + m = m + n \; \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

- $\underline{0 \in B}$: Probaremos por inducción en m que $0 + m = m + 0$ (puede pensarse que esta es la propiedad P a ser satisfecha por m). Observamos primero que es obvio para $m = 0$. Supongamos ahora que la igualdad se cumple para cierto m, entonces usando la asociatividad tenemos

$$0 + (m + 1) = (0 + m) + 1 = (m + 0) + 1 = m + 1 = (m + 1) + 0.$$

- De forma similar se prueba que 1 conmuta con todo los naturales, es decir, que $1 + m = m + 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (lo que es equivalente a decir que $1 \in B$).

- Supongamos ahora que $n \in B$, luego usando la asociatividad y el punto anterior se tiene

$$m+(n+1) = (m+n)+1 = 1+(m+n) = 1+(n+m) = (1+n)+m = (n+1)+m.$$

Por el principio de inducción $B = \mathbb{N}$. □

Ahora definimos el **producto** de la siguiente manera:

- $n.0 = 0$.
- $n.(m + 1) = n.m + n$.

Escribimos también $nm = n.m$.

Proposición 2.1.2. *El producto es conmutativo, asociativo y cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma, es decir:*

$$n.(m + k) = n.m + n.k \; \forall n, m, k \in \mathbb{N}.$$

La prueba de la proposición anterior se deja como ejercicio. Se sugiere aplicar argumentos similares a los utilizados para probar las propiedades de la suma.

2.2. El orden en los naturales

En la Sección 1.1.3 definimos el orden a partir de la pertenencia. Como aquí estamos partiendo de los axiomas de Peano debemos hacerlo a partir de la función sucesor y de lo que de ella se desprende. En particular lo haremos usando la suma.

Dados dos naturales n y m decimos que n es **menor o igual** a m (o que m es **mayor o igual** a n), y escribimos $n \leq m$, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + k = m$. Decimos que n es **menor** que m (o que m **mayor** que n), y escribiremos $n < m$, si $n \leq m$ y $n \neq m$.

Las siguientes propiedades se dejan como ejercicio. Se sugiere probarlas en orden utilizando la definición de $\leq$, el principio de inducción y en cada caso las propiedades anteriores.

Proposición 2.2.1. 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq s(n)$.*

2. *Si $n \leq m$ y $m \leq k$, entonces $n \leq k$.*
3. *$0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y si $n \leq 0$, entonces $n = 0$.*
4. *Para todo par de números $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq m$ si y sólo si $s(n) \leq s(m)$.*
5. *Dados dos naturales n y m se cumple $n \leq m$ o $m \leq n$.*
6. *Si $n \leq x \leq n + 1$, entonces $x = n$ o $x = n + 1$.*
7. *Si $n \leq m$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $n + k \leq m + k$ y $n.k \leq m.k$. Si además $n \neq m$ y $k \neq 0$, entonces las desigualdades son estrictas.*
8. *Si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces $n = m$.*

Una consecuencia del punto 7 de la proposición anterior es que si $n \leq m$, entonces existe un único natural k tal que $n + k = m$. Esto permite definir la **resta** de la forma $m - n = k$.

Teniendo definido el orden en los naturales podemos dar otra formulación del principio de inducción:

Principio de Inducción Completa (PIC): Sea P una propiedad tal que

- 0 satisface P, y
- si m satisface P para todo $m < n$, entonces n satisface P.

Entonces todo natural satisface la propiedad P.

Proposición 2.2.2. *$PIC \Leftrightarrow PIM$*

Demostración. El directo es claro ya que la hipótesis de PIM es más fuerte que la de PIC. Supongamos ahora que se cumple PIM y que tenemos una propiedad P que es satisfecha por 0 y tal que si m la satisface para todo $m < n$, entonces n también. Definimos entonces la propiedad $\tilde{P}$ de la siguiente manera:

$$n \text{ satisface } \tilde{P} \Leftrightarrow m \text{ satisface } P \ \forall m \leq n.$$

Es claro que 0 satisface $\tilde{P}$, además si n satisface $\tilde{P}$, entonces m satisface P para todo $m < n + 1$ y por lo tanto $n + 1$ satisface P, lo que implica que $n + 1$ satisface $\tilde{P}$. Por PIM tenemos que todos los naturales satisfacen $\tilde{P}$ y como consecuencia también satisfacen P. □

Observación 2.2.3. Uno puede considerar versiones de PIM y PIC comenzando de cualquier natural diferente del cero. Para probar esto basta con razonar de forma similar a como lo hicimos en el comentario que sigue a la Proposición 2.0.1

El siguiente teorema es un ejemplo de aplicación del PIC y como veremos, también puede ser usado como herramienta para obtener resultados interesantes.

Teorema 2.2.4 (Principio de buena ordenación[1])**.** *Todo subconjunto no vacío de* $\mathbb{N}$ *tiene mínimo. Esto es: si* $A \subset \mathbb{N}$ *es no vacío, existe* $m \in A$ *tal que* $m \leq n$ *para todo* $n \in A$.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$ no vacío. Si $0 \in A$, entonces 0 es mínimo (punto 3 de la Proposición 2.2.1). Supongamos que no es así y consideremos la propiedad P como la no pertenencia a A, es decir

$$n \text{ cumple } P \Leftrightarrow n \notin A.$$

Por lo supuesto anteriormente tenemos que 0 cumple P. Pero como no todo elemento de $\mathbb{N}$ cumple P (porque A es no vacío), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

- n cumple P para todo $n < m$, y
- m no cumple P (es decir que $m \in A$).

Es facil verificar que m es el mínimo de A: si $n \in A$, entonces no puede ser $n < m$ porque en este caso n cumpliría P, luego $m \leq n$ para todo $n \in A$. □

Como aplicación del principio de buena ordenación tenemos lo siguiente:

Teorema 2.2.5 (División entera)**.** *Sean* n *y* m *dos números naturales con* $m \neq 0$. *Entonces existen naturales* q *y* r *tales que*

(i) $n = qm + r$, *y*

(ii) $r < m$.

[1]En teoría de conjuntos también se conoce como *Principio de Buena Ordenación* al siguiente enunciado: *En todo conjunto se puede definir una relación de orden total que cumple que todo subconjunto no vacío tiene mínimo.* Este enunciado es equivalente al axioma de elección (ver Apéndice A).

Demostración. Si $n = 0$ entonces la tesis se cumple con $q = r = 0$.

Si $n \neq 0$ consideramos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : n < xm\}$. Observamos que $n + 1 \in A$ (punto 7 de la Proposición 2.2.1), luego, al ser A no vacío, el principio de buena ordenación nos dice que existe un mínimo $p \in A$. Este mínimo además tiene que ser diferente de 0 porque n lo es, luego tiene sentido considerar $q = p - 1$.

Podemos afirmar que $qm \leq n$, porque si no q pertenecería a A y eso no puede ser ya que p es el mínimo de este conjunto. Luego tiene sentido considerar $r = n - qm$, con lo que se cumple la igualdad (i).

Veamos por último que $r < m$: si $m \leq r$, entonces tenemos

$$n = qm + r \geq qm + m = (q + 1)m = pm.$$

Como $p \in A$ tenemos que $n < pm \leq n$, lo que es absurdo. $\square$

Para finalizar mostraremos un último ejemplo de aplicación de PIC. Para esto haremos un par de definiciones:

- Diremos que un número natural m **divide** a otro natural n si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = mk$. También decimos que m es **divisor** de n o que n es **múltiplo** de m.

- Un natural p es **primo** si sus únicos divisores son 1 y p.

Proposición 2.2.6. *Todo número natural diferente de* 0 *y* 1 *tiene un divisor primo.*

Demostración. Diremos que $n \neq 0, 1$ cumple P si n tiene un divisor primo.

Observamos que $2 = s(1)$ es primo: si $2 = mk$, entonces $m, k \leq 2$ (es consecuencia del punto 7 de la Proposición 2.2.1), luego m y k sólo pueden ser 1 o 2. Tenemos entonces que 2 cumple P.

Supongamos que m cumple P para todo $m < n$. Si n no es primo, entonces se puede escribir $n = mk$ con $1 < m < n$. Tomemos p un divisor primo de m y escribamos $m = pr$, luego $n = (pr)k = p(rk)$. Es decir que n tiene un divisor primo y por lo tanto cumple P.

Por PIC tenemos que todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tiene un divisor primo. $\square$

Capítulo 3

Relaciones

Como se ve en el Capítulo 1, una relación de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Allí estudiamos una clase especial de relaciones: las funciones. En este capítulo trataremos otras dos clases de relaciones que tienen la particularidad de estar contenidas en productos de la forma $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ de esta forma será llamada simplemente **relación en** X y escribiremos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diremos también que $\mathcal{R}$ es

- **reflexiva** si $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- **simétrica** $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$.
- **asimétrica** si $x\mathcal{R}y$ implica que no se cumple $y\mathcal{R}x$.
- **antisimétrica** si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica $x = y$.
- **transitiva** si $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$.

Ejemplo 3.0.1. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones

- $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = X \times X$.

Observamos que sólo $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4$ son reflexivas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_4$ son simétricas, todas salvo $\mathcal{R}_4$ son antisimétricas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ son asimétricas y que todas salvo $\mathcal{R}_3$ son transitivas.

3.1. Relaciones de orden

En el capítulo anterior definimos en $\mathbb{N}$ las relaciones $\leq$ y $<$. En la Proposición 2.2.1 se muestran algunas propiedades de estas relaciones que serán importantes en este capítulo. Por ejemplo la relación $\leq$ cumple:

- $n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es reflexiva)
- Si $n \leq m$ y $n \leq n$, entonces $n = m$ (es antisimétrica)
- Si $n \leq m$ y $m \leq k$, entonces $n \leq k$ (es transitiva)
- Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq m$ o $m \leq n$ (todos los pares de elementos de $\mathbb{N}$ son comparables)

Inspirados en este ejemplo haremos la siguiente definición general:

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de orden amplio** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Generalmente usaremos para las relaciones de orden amplio la notación: $\leq$ o $\preceq$.

Por otro lado la relación $<$ en los naturales cumple:

- $n < m$ implica que no se cumple $m < n$ (es asimétrica)
- Si $n < m$ y $m < k$, entonces $n < k$ (es transitiva)
- Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n < m$, $m < n$ o $n = m$ (se cumple la tricotomía)

Hacemos la siguiente la definición general:

Decimos que $\mathcal{R}$ es una **relación de orden estricto** si es asimétrica y transitiva. Para las relaciones de orden estrito usamos generalmente la notación: $<$ o $\prec$.

Proposición 3.1.1. *Si $\leq$ es una relación de orden amplio en un conjunto, entonces la relación $<$ definida por*

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ y } x \neq y$$

es una relación de orden estricto.

Por otro lado, si $<$ es una relación de orden estricto, entonces la relación definida por

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ o } x = y$$

es una relación de orden amplio.

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Como consecuencia de esto dar una relación de orden amplio o una relación de orden estrico es equivalente, es decir que al definir una se define automáticamente la otra. Nos concentraremos entonces en las relaciones de orden amplio y les llamaremos simplemente **relaciones de orden**.

Un **conjunto ordenado** es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden en X. Observar que si $A \subset X$, entonces la relación $\leq$ define una relación de orden en A. Puede entonces considerarse el conjunto ordenado $(A, \leq)$ (donde se usa la notación $\leq$ también para la restricción de la relación a A).

Diremos que es un **conjunto totalmente ordenado** si se cumple que dado un par de elementos $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ o bien $y \leq x$. Es decir que todos los elementos son comparables.

Una **cadena** en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subset X$ que está totalmente ordenado por $\leq$.

Ejemplos 3.1.2.

1. Recordando la definición de números enteros dada en el Ejemplo 1.1.8, observar que el orden usual en este conjunto queda definido por:

   - $(n, 0) \leq (m, 0)$ si $m \leq n$,
   - $(n, 1) \leq (m, 1)$ si $n \leq m$, y
   - $(n, 0) \leq (m, 1)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.

   Este también es un orden total.

2. Dado un conjunto cualquiera X ponemos en el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ el orden $A \leq B$ si y solo si $A \subset B$. Este no es un orden total, salvo que X sea un conjunto unitario.

Fijemos ahora $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que

- $m \in X$ es un elemento **minimal** si $x \leq m$ implica $x = m$.
- $M \in X$ es un elemento **maximal** si $M \leq x$ implica $x = m$.
- $m \in X$ es un **mínimo** si $m \leq x$ para todo $x \in X$.
- $M \in X$ es un **máximo** si $x \leq M$ para todo $x \in X$.

Observar que si $(X, \leq)$ tiene un máximo, entonces este es único (lo mismo para mínimo).

Ejemplo 3.1.3. Consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subconjunto de $\mathbb{N}$ dado por

$$A_n = \{n.m : m \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir que A_n es el conjunto de los múltiplos de n. Luego tomamos

$$X = \{A_n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0, 1\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

y lo ordenamos por inclusión (el orden heredado de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Observemos que $A_n \subset A_m$ si y sólo si m es múltiplo de n. Luego se tiene lo siguiente:

1. X no tiene elementos minimales: Para todo conjunto A_n podemos tomar p un número primo que no divide a n, luego $A_{pn} \subset A_n$; pero además $n \notin A_{pn}$, por lo que la inclusión es estricta.
2. Los elementos maximales son los conjuntos de la forma A_p con p primo. Luego podemos afirmar que X no tiene máximo.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $A \subset X$. Decimos que un elemento $x \in X$ es:

- una **cota superior** de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$.
- una **cota inferior** de A si $x \leq a$ para todo $a \in A$.

Ejemplos 3.1.4. 1. Consideramos $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y ponemos en $\mathcal{P}(X)$ el orden dado por la inclusión. Sea $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}$ la colección de subconjuntos de X con tres elementos. Observar que la única cota inferior de $\mathcal{P}_3$ es $\emptyset$ y la única cota superior es X.

2. En el producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponemos el orden lexicográfico, es decir: $(n, m) \leq (k, r)$ si
   - $n < k$, o
   - $n = k$ y $m \leq r$.

   Y consideramos los conjuntos

   $$A = \mathbb{Z} \times \{0\} \text{ y } B = \{0\} \times \mathbb{Z}.$$

   Luego tenemos que A no tiene cota inferior ni cota superior, mientras que B si las tiene (por ejemplo $(-1, 0)$ es una cota inferior y $(1, 0)$ es una cota superior). Sin embargo B no tiene maximales ni minimales.

3.2. Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Generalmente se usará para las relaciones de equivalencia la notación: $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$ o $\asymp$.

Ejemplo 3.2.1 (Congruencia módulo n)**.** Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$, definida por

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } n.$$

Aquí la noción de *múltiplo* puede definirse de la misma forma que para los números naturales a aprtir de la división entera.

Veamos que esta es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $a - a = 0$ es múltiplo de n para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que $a \equiv_n a$ para todo a.
- Es simétrica: si $a \equiv_n b$, entonces $a - b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b - a = -kn$, lo que quiere decir que $b \equiv_n a$.
- Supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Esto implica que existen k y h tal que $a - b = kn$ y $b - c = hn$, luego

  $$a - c = a - b + b - c = kn + hn = (k + h)n.$$

  Por lo tanto $a \equiv_n c$.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X, definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$ como el subconjunto de todos los elementos de X que se relacionan con x, es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subset X.$$

Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 (Ejemplo 3.2.1) podemos mirar la clase del cero:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n - 0 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este es el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. En este caso la clase del 0 para la congruencia módulo n es siempre el conjunto de los múltiplos de n. Observemos que en general la transitividad de la relación de equivalencia implica que si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$.

Definimos el **conjunto cociente** de una relación $\sim$ en X como el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Volvamos al ejemplo de la congruencia módulo 3. Para hallar el cociente de esta relación debemos determinar cuáles son todas sus clases de equivalencia. Ya sabemos que la clase del cero es el conjunto de todos los múltiplos de 3. Observamos que además

- $[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, y

- $[2] = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$

son otras dos clases diferentes. Se tiene además que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces al dividir n entre 3 obtenermos $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$. Luego n está en alguna de las clases anteriormente mencionadas. En conclusión

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Ejercicio 3.2.2. Probar que en general el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene n elementos.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X definimos la **proyección al cociente** como la función

$$\pi : X \to X/\sim,\ \pi(x) = [x].$$

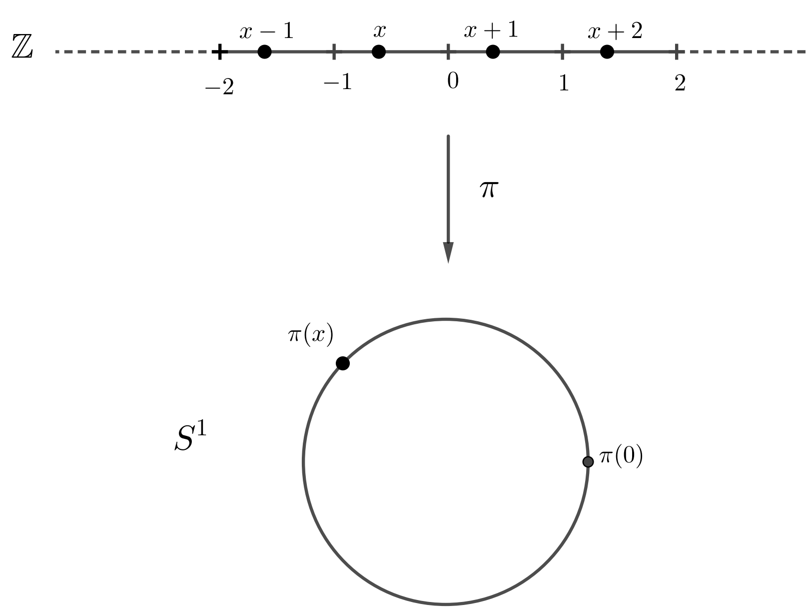
Ejemplo 3.2.3. Ponemos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Se deja como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. El conjunto cociente de esta relación puede verse geométricamente como el círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Observar que de esta forma la proyección queda $\pi : \mathbb{Z} \to S^1,\ \pi(x) = e^{2\pi i x}$.



3.2.1. Particiones

Una **partición** de un conjunto X es una familia P de subconjuntos de X (es decir que $P \subset \mathcal{P}(X)$) tal que:

1. Si A y B pertenecen a P y son diferentes, entonces $A \cap B = \emptyset$. Dicho de otra forma, los elementos de P son disjuntos dos a dos.
2. La unión de los elementos de P es todo X, es decir $\bigcup P = X$.

Ejemplos 3.2.4. 1. Si X es cualquier conjunto, entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es una partición; también lo es X. Diremos que estas son las particiones **triviales** de X.

2. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego si ponemos

$$A = \{1\},\ B = \{2, 5\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ y } D = \{1, 6\},$$

tenemos por ejemplo que $P_1 = \{A, B, C\}$ es una partición pero $P_2 = \{B, D\}$ y $P_3 = \{B, C, D\}$ no lo son.

En la siguiente proposición vemos que dar una relación de equivalencia en un conjunto es equivalente a dar una partición del mismo.

Proposición 3.2.5. *1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, entonces el cociente $X/\sim$ es una partición en X.*

2. Sea P una partición en un conjunto X. Entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ en X tal que $X/\sim = P$.

Demostración. Para probar la primera parte debemos ver primero que las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son disjuntas dos a dos. Supongamos entonces que tenemos dos clases diferentes $[x]$ e $[y]$ que no son disjuntas. Esto quiere decir que existe z en la intersección de ambas, o dicho de otro modo $z \sim x$ y $y \sim z$. La transitividad de $\sim$ implica que $x \sim y$ y luego $[x] = [y]$. Por otro lado es claro que todo elemento $x \in X$ pertenece a una clase de equivalencia, luego la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto X.

Para la segunda parte alcanza con definir $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Para ver la unicidad supongamos que $\sim$ y $\equiv$ son dos relaciones de equivalencia tal que $X/\sim\, = X/\equiv\, = P$. Probemos que $x \sim y$ si y sólo si $x \equiv y$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \sim \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \equiv \\ &\Leftrightarrow x \equiv y. \end{aligned}$$

□

Observamos que si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces esta induce una partición en X dada por los conjuntos $f^{-1}(\{y\})$ para $y \in Y$. Por la proposición anterior dicha partición define una relación de equivalencia $\sim_f$ en X, que puede caracterizarse de la siguiente manera:

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

El cociente dado por esta relación puede ser identificado con el conjunto Y mediante $y \mapsto f^{-1}(y)$. Luego puede pensarse que toda función sobreyectiva es una proyección al cociente de alguna relación de equivalencia en el dominio de f.

3.2.2. Números racionales

Consideremos en el conjunto $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ (con $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos) la relación dada por

$$(n, m) \sim (k, r) \Leftrightarrow nr = mk.$$

Veamos primero que es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $(n, m) \sim (n, m)$ porque claramente $nm = nm$.
- Es simétrica: si $(n, m) \sim (k, r)$, entonces $nr = mk$. Esto implica que $mk = nr$ y luego $(k, r) \sim (n, m)$.
- Supongamos que $(n, m) \sim (k, r)$ y $(k, r) \sim (\ell, h)$, es decir, $nr = mk$ y $kh = r\ell$. Luego multiplicando la primera igualdad por h se tiene

  $$nrh = mkh = mr\ell.$$

  Como $r \neq 0$, la igualdad anterior implica $nh = m\ell$, lo que significa que $(n, m) \sim (\ell, h)$.

Adoptaremos la notación $\frac{n}{m}$ para referirnos a la clase de (n, m) y escribimos $\mathbb{Q} := X/\sim$. Este cociente es el conjunto de los **números racionales**.

A partir de esta construcción podemos observar que los números enteros pueden verse como un subconjunto de los números racionales. Más precisamente lo hacemos mediante la función inyectiva

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ i(n) = \frac{n}{1}.$$

Definimos las operaciones suma y producto en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{r} = \frac{nr + km}{mr}; \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{r} = \frac{nk}{mr}.$$

Se deja como ejercicio probar que estas operaciones están bien definidas, es decir que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $\frac{k}{r} = \frac{k'}{r'}$, entonces

$$\frac{nr + km}{mr} = \frac{n'r' + k'm'}{m'r'} \text{ y } \frac{nk}{mr} = \frac{n'k'}{m'r'}.$$

Observar que las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ extienden a las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$i(n) + i(m) = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} = i(n+m)$$

y

$$i(n) \cdot i(m) = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = i(nm).$$

La relación de orden usual en los números racionales es definida de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} \leq \frac{k}{r} \Leftrightarrow nr \leq km.$$

Donde el símbolo $\leq$ en la derecha indica el orden de los enteros. Observar que $(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

3.3. Matriz asociada a una relación

Supongamos que X es un conjunto con n elementos y escribimos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La **matriz asociada** a una relación $\mathcal{R}$ en X es una matriz (a_{ij}) tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} x_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Tener en cuenta que la definición de matriz asociada depende del órden dado en el conjunto X, por lo que hay tres datos que son necesarios para determinarla: el conjunto finito, la relación y un órden total en el conjunto.

Ejemplo 3.3.1. Tomemos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,3), (4,1), (4,4)\}.$$

Su matriz asociada nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observar que dada una matriz de $n \times n$ y un conjunto X con n elementos dispuestos en cierto orden, existe una única relación de equivalencia cuya matriz asociada es la dada.

Ejercicio 3.3.2. Determinar qué propiedades tiene la matriz asociada a una relación:

1. Reflexiva
2. Simétrica
3. Antisimétrica
4. Asimétrica

Más adelante nos interesará contar el número de relaciones que cumplan con determinadas propiedades. En ese caso la representación matricial de las relaciones nos será útil.

Capítulo 4

Cardinalidad

Nos enfocamos aquí en un par de preguntas:

- ¿Qué es contar?
- ¿Qué significa que un conjunto tenga n elementos?

Para ilustrar un poco esto antes de verlo más formalmente consideremos el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Lo que uno hace al contar este conjunto es señalar cada elemento y decir en órden los números naturales a partir del 1, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{c}\{\,a,\ b,\ c,\ d,\ e\,\}\\ \begin{array}{ccccc}\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\end{array}$$

Cuando ya no quedan elementos que etiquetar, se toma el último natural usado y se declara: "El conjunto tiene 5 elementos".

Mirando la figura podemos observar que allí se establece una función entre el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Vemos además que esta función es biyectiva.

Podría pasar que dado un conjunto X no fuera posible llevar a cabo este proceso de manera de agotar todos sus elementos. En ese caso estamos en presencia de lo que llamamos un conjunto infinito.

4.1. Finitud

Diremos que un conjunto X es **finito** si es vacío o bien existe una función biyectiva

$$f : \{1, \ldots, n\} \to X$$

para algún número natural $n \in \mathbb{N}^*$. Si X no es finito diremos que es **infinito**.

Observamos que si $A \subset \{1, \ldots, n\}$, entoncecs A es finito. Para esto contemplamos dos posibilidades: si $A = \emptyset$ no hay nada que probar, si $A \neq \emptyset$ puede definirse la siguiente función de forma recursiva:

- $h(1) = \min A$,
- Si $A \setminus \{h(1), \ldots, h(k-1)\} \neq \emptyset$, se define $h(k) = \min A \setminus \{h(1), \ldots, h(k-1)\}$.

Este proceso se termina si al cabo de m pasos se llega a $A = \{h(1), \ldots, h(m)\}$. En ese caso queda definida una función biyectiva $h : \{1, \ldots, m\} \to A$. Observamos que esto efectivamente termina en a lo sumo n pasos porque para todo k se da $h(k) \geq k$.

Proposición 4.1.1. *Sea X un conjunto. Si se cumple que*

1. *existe $f : X \to \{1, \ldots, n\}$ inyectiva ($n \in \mathbb{N}$), o*
2. *existe $f : \{1, \ldots, n\} \to X$ sobreyectiva,*

entonces X es finito.

Demostración. Para la primera parte usamos la observación anterior para $A = f(X)$, lo que nos da una función biyectiva $f^{-1} \circ h : \{1, \ldots, m\} \to X$.

Para probar la segunda parte vemos que podemos definir una función inyectiva $g : X \to \{1, \ldots, n\}$ tomando para cada $x \in X$ un número $g(x) \in f^{-1}(\{x\})$. □

El siguiente es un resultado clásico de combinatoria:

Teorema 4.1.2 (Principio del Palomar). *Consideremos un número natural cualquiera n. Luego no existe ninguna función de $\{1, \ldots, n+1\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ que sea inyectiva.*

Demostración. Vamos a probar el principio del palomoar por inducción.

Si $n = 1$, entonces existe una única función $f : \{1, 2\} \to \{1\}$, definida por $f(1) = f(2) = 1$. Es claro que f no es inyectiva.

Supongamos que no existe ninguna función inyectiva de $\{1, \ldots, n+1\}$ a $\{1, \ldots, n\}$ y que tenemos $f : \{1, \ldots, n+2\} \to \{1, \ldots, n+1\}$. Si f fuera inyectiva definiremos otra función inyectiva $g : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n\}$, lo que nos dara una contradicción con la hipótesis de inducción.

Distinguimos dos casos

- Si $n+1 \notin f(\{1,\ldots,n+1\})$, entonces podemos definir g como la restricción de f al conjunto $\{1,\ldots,n+1\}$.
- En el otro caso ponemos $a = f^{-1}(n+1)$ y $b = f(n+2)$. Observar que $a \neq n+2$ y $b \neq n+1$. Definimos entonces g de la siguiente manera:

  $$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

  Esta función es inyectiva, lo que nos lleva a una contradicción.

Por inducción tenemos la tesis del teorema. □

El nombre *Principio del Palomar* se debe a su formulación más popular: No pueden meterse $n+1$ palomas en n jaulas sin que dos palomas compartan una jaula.

Corolario 4.1.3. *No existe ninguna función inyectiva de* $\{1,\ldots,n\}$ *en* $\{1,\ldots,m\}$ *si* $m < n$. *Como consecuencia se tiene que no existe una función biyectiva entre* $\{1,\ldots,n\}$ *y* $\{1,\ldots,m\}$ *si* $n \neq m$.

Demostración. Si existiera $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ inyectiva, entonces su restricción a $\{1,\ldots,m+1\}$ sería también inyectiva, lo que es absurdo por el principio del palomar. □

El corolario anterior y el hecho de que la composición de funciones biyectivas es biyectiva, nos permiten hacer la siguiente definición:

Sea X un conjunto finito. Decimos que n es el **cardinal** de X si existe una función biyectiva $f : \{1,\ldots,n\} \to X$. Escribimos $\#X = n$.

Ejercicio 4.1.4. Probar la siguiente versión más general del principio del palomar: si se meten $n.m+1$ palomas en n jaulas, entonces hay una jaula que tiene por lo menos $m+1$ palomas.

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Notaremos en este caso $X \simeq Y$. A partir de esto uno puede decir que X tiene cardinal n si $X \simeq \{1,\ldots,n\}$.

Ejercicio 4.1.5. Sea $\mathcal{X}$ una colección de conjuntos. Probar que la equipotencia define una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$. Describir su cociente en el caso de que los elementos de $\mathcal{X}$ sean todos conjuntos finitos.

4.2. Numerabilidad

Observemos que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. Si no lo fuera existiría una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, n\}$. Pero de esta forma la restricción de f al conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ sería una función inyectiva, lo que contradice el principio del palomar.

Nos preguntamos a partir de esto qué otros conjuntos infinitos existen y si todos ellos son equipotentes a $\mathbb{N}$, o si por el contrario hay conjuntos infinitos "más grandes" que otros.

Comenzamos dando la siguiente definición: Diremos que un conjunto X es **numerable** si es finito o es equipotente con $\mathbb{N}$.

Observamos por ejemplo que si $A \subset \mathbb{N}$, entonces A es numerable. Para probar esto podemos suponer que A es infinito (en el otro caso no hay nada que probar) y considerar la función $f : \mathbb{N} \to A$ definida por recurrencia de la siguiente forma:

- $f(0) = \text{mín}\, A$, y
- $f(n) = \text{mín}(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\})$.

Si este proceso terminara quedaría probada la finitud de A, pero como supusimos que este conjunto es infinito el paso recursivo siempre puede hacerse. Luego f queda bien definida y es fácil ver que es biyectiva (se deja como ejercicio).

Ejemplo 4.2.1. Veamos que $\mathbb{Z}$ es numerable. Para esto basta con considerar la función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

La siguiente proposición nos permitirá construir más ejemplos.

Proposición 4.2.2. *Sea X un conjunto.*

(i) Si X es infinito, entonces existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

(ii) Si existe $f : X \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces X es numerable.

(iii) Si existe $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva, entonces X es numerable.

La propiedad (i) dice que todo conjunto infinito contiene una copia de $\mathbb{N}$, es decir que de alguna manera el infinito numerable es el orden de infinito más chico.

Demostración. (i) Definimos f por recurrencia:

- $f(0) = x_0 \in X$ (elegimos cualquier x_0 ya que X es no vacío)

- Si tenemos definido $f(0), \dots, f(n)$, entonces como X no es finito, existe $x \in X \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ponemos $f(n+1) = x$.

Es claro que la función así definida es inyectiva.

(ii) Como f es inyectiva tenemos que $X \simeq f(X)$. Por otro lado $f(X)$ está contenido en $\mathbb{N}$ es numerable, por lo que es numerable. Luego X también lo es.

(iii) Queremos definir una función $g : X \to \mathbb{N}$ que sea inyectiva, luego por la parte anterior X será numerable. Para esto elegimos para cada $x \in X$ un elemento $n \in f^{-1}(\{x\})$ y ponemos $g(x) = n$. La función así definida es claramente inyectiva, pues si $g(x) = g(y) = n$, entonces $f(n) = x$ y $f(n) = y$, lo que implica $x = y$.

$\square$

Observación 4.2.3. En la parte (*iii*) de la proposición anterior se utilizó el axioma de elección. Una definición alternativa de g que no utiliza este axioma es la siguiente:

$$g(x) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\} = \text{mín}\, f^{-1}(\{x\}).$$

Dicho mínimo existe por el principio de buena ordenación en $\mathbb{N}$ puesto que, como f es sobreyectiva, el conjunto $f^{-1}(\{x\})$ es no vacío para todo $x \in X$.

Proposición 4.2.4. *Si A y B son numerables, entonces $A \times B$ también lo es.*

Demostración. Observar que si A y B son infinitos, entonces $A \times B$ es equipotente con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Probaremos entonces que existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lo hacemos de la siguiente manera:

$$f(n, m) = 2^n 3^m.$$

La inyectividad de esta función está dada por la unicidad de la descomposición en factores primos.

Se deja como ejercicio probar los otros casos (A y/o B finitos). $\square$

De lo anterior puede concluirse que el producto cartesiano de cualquier familia finita de conjuntos numerables es numerable.

Como consecuencia de la Proposición 4.2.4 tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2.5. Veamos que el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. Para esto primero observamos que $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es numerable por la proposición anterior. Luego como la proyección al cociente $\pi : X \to \mathbb{Q}$ es sobreyectiva, podemos utilizar el punto (*iii*) la Poposición 4.2 para concluir que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ejercicio 4.2.6. Probar que la unión de una familia numerablde de conjuntos numerables es a su vez numerable.

Tenemos entonces que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$, que son conjuntos que contienen estrictamente a $\mathbb{N}$, son numerables. Sin embargo existe una diferencia esencial entre estos conjuntos y $\mathbb{R}$, como vemos a continuación.

Proposición 4.2.7. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable.*

Demostración. La prueba que presentamos utiliza una idea conocida como *argumento diagonal de Cantor*.

Vamos a probar que existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no es numerable. Esto implicará que $\mathbb{R}$ tampoco lo es (pues los subconjuntos de un conjunto numerable son a su vez numerables).

Definimos $S \subset [0, 1)$ como el conjunto de números reales que tienen una expresión decimal que solo utilice ceros y unos. Queremos ver que no existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to S$.

Veamos que dada una función $f : \mathbb{N} \to S$, existe un elemento de S que no está en la imagen de f. Para esto tomamos un número $x \in S$ tal que en el lugar k después de la coma tenga una cifra (0 o 1) diferente al lugar k después de la coma de $f(k)$. Podemos observar que este x no está en la imagen de f porque para cualquier $k \in \mathbb{N}$ el lugar k después de la coma de x difiere del lugar k después de la coma de $f(k)$.

Un ejemplo de lo anterior puede verse a continuación:

$$\begin{aligned} f(1) =& 0,01100010100111\ldots \\ f(2) =& 0,01001110010101\ldots \\ f(3) =& 0,10100010010101\ldots \\ f(4) =& 0,00011101010100\ldots \\ & \vdots \end{aligned}$$

Aquí tenemos que el primer lugar después de la coma de $f(1)$ es 0, el segundo lugar después de la coma de $f(2)$ es 1, etc. Luego $x = 0,1000\ldots$ no está en la imagen de f. $\square$

Ejercicio 4.2.8.

1. Probar que el conjunto S de la proposición anterior es equipotente con el conjunto de sucesiones de ceros y unos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
2. Probar que $\mathbb{R}$ es equipotente con $[0, 1]$.

Tenemos entonces conjuntos infinitos de diferentes órdenes ($\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ por ejemplo). Podríamos decir que desde el punto de vista de su cardinal, $\mathbb{R}$ es estrictamente más grande que $\mathbb{N}$. A partir de aquí aparecen de forma natural dos preguntas:

- ¿Existe algún órden de infinito entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$? Esto podría precisarse de la siguiente forma: ¿Existe un conjunto A que no es equipotente a $\mathbb{N}$ ni a $\mathbb{R}$ y funciones inyectivas $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : A \to \mathbb{R}$?

- ¿Existen órdenes de infinito más grandes que el de $\mathbb{R}$? Es decir: ¿$\mathbb{R}$ se puede inyectar en un conjunto X que no sea equipotente a este?

La teoría de conjuntos no permite responder a la primera pregunta. Esto quiere decir que no puede demostrarse que es cierta ni que es falsa a partir de los axiomas. La segunda pregunta es respondida por el siguiente teorema.

Teorema 4.2.9 (Cantor)**.** *Para todo conjunto X se tiene que $\mathcal{P}(X)$ no es equipotente con X. En particular no existe ninguna función sobreyectiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$.*

Demostración. Supongamos que $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es sobreyectiva. Definimos

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Como f es sobreyectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Nos preguntamos entonces si a pertenece o no a A. Estudiamos las dos opciones:

- Si $a \in A$, entonces por la definición de A se tiene que $a \notin f(a) = A$, lo que es absurdo.
- Si $a \notin A$, entonces $a \notin f(a)$ y por lo tanto $a \in A$, que también es absurdo.

Concluimos entonces que no puede existir dicha función f.

□

El teorema de Cantor nos dice que existe una gran cantidad de ordenes diferentes de infinito pues puede construirse, por ejemplo, la sucesión de conjuntos

$$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))),\ \ldots$$

de forma tal que cada uno de ellos es estricamente más grande que el anterior.

Ejercicio 4.2.10.

1. Probar que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Probar que los dos conjuntos anteriores son equipotentes con $\mathbb{R}$. Esto combinado con Ejercicio 4.2.8 nos dice que S es equipotente con $\mathbb{R}$ a pesar de ser un subconjunto en apariencia despreciable.

Capítulo 5

Combinatoria

En el capítulo anterior dijimos que un conjunto X es finito si para algún natural n existe una función biyectiva
$$f : \{1, \ldots, n\} \to X.$$
En este caso decíamos que n es el cardinal de X, o de forma más coloquial, que X tiene n elementos. Luego sabemos expresar de una forma precisa lo que significa *contar* un conjunto finito, que es en definitiva determinar su cardinal.

A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre el problema de cómo contar, es decir, en desarrollar estrategias para determinar el cardinal de un conjunto finito del cual conocemos su definición por especificación.

Para ilustrar la complejidad que puede tener este problema planteemos dos ejemplos:

1. ¿Cuál es el cardinal del siguiente conjunto de símbolos $\{*, 0, 35, +, a, k\}$?
2. Cuántas palabras de no más de 12 letras (no necesariamente pertenecientes al diccionario) tienen diptongo?

El primer problema es muy sencillo, uno puede observar rápidamente que el conjunto tiene 6 elementos. Pero la resolución del segundo presenta cierta complejidad. Ya el conteo de todas las posibles palabras de largo k ($k = 1, \ldots, 12$) es un problema no trivial que equivale, por ejemplo, a contar funciones $f : \{1, \ldots, k\} \to \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es el abecedario. Sumemos a esto que debemos determinar cuales de todas estas funciones corresponden a palabras con diptongo y que esto debe hacerse para cada k en $\{1, \ldots, 12\}$.

5.1. Principios básicos de conteo

Veremos aquí algunas propiedades fundamentales que servirán de punto de partida para atacar problemas de conteo a lo largo de todo el capítulo.

5.1.1. Principio de la suma

Una primer enunciación del principio de la suma es la siguiente:

Principio de la suma[1]**:** *Si una primer tarea puede ser realizada de m formas diferentes, una segunda tarea puede ser realizada en n formas diferentes y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay $m + n$ formas de realizar una o la otra.*

A modo de ejemplo podríamos contemplar el siguiente problema:

Ejemplo 5.1.1. En una esquina de la calle Cassinoni hay un bar llamado *El Turco*, atendido por su propio dueño (cuyo apodo le da el nombre al lugar). Sobre el mostrador el Turco tiene unos frascos de golosinas que suele dar a modo de cambio cuando no tiene monedas. Un día, para congraciarse con una niña que estaba sentada en el mostrador con su padre, el Turco le ofreció tomar una golosina de alguno de los dos frascos que tenía más a mano. En uno había 25 caramelos surtidos (sorprendentemente todos diferentes), mientras que el otro contenía 10 chicles (todos de diferente sabor). La niña calculó que tenía $25 + 10 = 35$ opciones para elegir su golosina.

En el ejemplo anterior uno puede rápidamente interpretar cada frasco como un conjunto, y las opciones de escoger golosinas de un frasco como el cardinal de dicho conjunto. Por otro lado la elección que se le ofrece a la niña es equivalente a juntar todas las golosinas en una bolsa y pedirle que saque de allí una unidad cualquiera. Este nuevo conjunto es la unión de los dos conjuntos anteriores. Luego si A es el conjunto de los caramelos y B es el conjunto de los chicles, el principio de la suma en este caso puede leerse como la igualdad $\#(A \cup B) = \#A + \#B$. De aquí extraemos una enunciación un poco más precisa de este principio:

Teorema 5.1.2 (Principio de la suma)**.** *Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Entonces $\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$. Esto quiere decir que existen dos funciones biyectivas $f : \{1, \ldots, m\} \to A$ y $g : \{1, \ldots, n\} \to B$. Definimos la función $h : \{1, \ldots, m + n\} \to A \cup B$ por:

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leq m \\ g(k - m) & \text{si } k > m \end{cases}$$

[1] Extraido de [G]

Debemos probar que h es biyectiva, luego queda probada la tesis.

Veamos primero que es inyectiva. Supongamos que $h(k) = h(r)$ (sin pérdida de generalidad podemos asumir $k \leq r$). Distinguimos tres casos:

- Si $k, r \leq m$, entonces $f(k) = f(r)$, y como f es inyectiva, k=r.
- Si $k \leq m < r$, entonces $h(k) = f(k) \in A$ y $h(r) = g(r - m) \in B$. Pero esto es absurdo porque A y B son disjuntos.
- Si $k, r > m$, entonces $g(k-m) = g(r-m)$, lo que implica $k - m = r - m$ y luego $k = r$.

Tenemos entonces la inyectividad de h.

Probemos ahora que h es sobreyectiva. Si $x \in A \cup B$ podemos distinguir dos casos:

- Si $x \in A$, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(k) = x$ y luego $h(k) = x$.
- Si $x \in B$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g(k) = x$ y luego $h(k + m) = x$.

Concluimos que h es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. □

Usando la asociatividad de la unión podemos deducir lo siguiente:

Corolario 5.1.3. *Si $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (\#A_1) + \cdots + (\#A_k)$$

5.1.2. Principio del producto

Consideramos ahora la siguiente enunciación del principio del producto:

Principio del producto[2]: *Si un procedimiento puede ser dividido en un primer paso para el cual hay m posibilidades y un segundo paso, y si para cada forma de realizar el primer paso hay luego n formas de realizar el segundo, entonces el procedimiento puede ser realizado de $m.n$ formas diferentes.*

Este principio es un poco más complejo y para lograr una formulación más precisa en términos de la teoría de conjuntos vamos a aproximarnos en dos pasos.

Para el primero estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1.4. Para darle un empuje al negocio, el Turco decide ofrecer para el almuerzo una fórmula consistente en plato principal y postre a un precio muy competitivo. Para el plato principal el bar dispone de siete opciones (tres de ellas son algún tipo de milanesa), mientras que tiene sólo cinco opciones de postre. ¿Cuantas posibles fórmulas es posible armar?

[2] También extraído de [G]

Reinterpretando lo anterior podemos llamar A al conjunto de platos principales y B al conjunto de postres. Luego podemos ver las diferentes formulas como el conjunto $A \times B$. Lo que estamos diciendo puede escribirse de la siguiente manera:

Proposición 5.1.5. *Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces $\#(A \times B) = (\#A).(\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$, entonces existen funciones biyectivas $f : \{0, \dots, m-1\} \to A$ y $g : \{0, \dots, n-1\} \to B$.

Queremos definir una función biyectiva $h : \{0, \dots, nm-1\} \to A \times B$. Para esto recordemos el teorema de división entera tomando m como divisor (Teorema 2.2.5): Dado $k \in \mathbb{N}$ existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, \dots, m-1\}$ tales que $k = qm + r$. Luego definimos:

$$h(k) = (f(r), g(q)), \text{ donde } k = qm + r.$$

Para ver que esta función es inyectiva suponemos que $h(k) = h(\ell)$, es decir que si $k = qm + r$ y $\ell = q'm + r'$, entonces $f(r) = f(r')$ y $g(q) = g(q')$. Como f y g son inyectivas tenemos que $q = q'$ y $r = r'$, lo que implica $k = \ell$.

Para ver que es sobreyectiva tomemos un par (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ y pongamos $r = f^{-1}(a)$ y $q = g^{-1}(b)$. Luego es claro que $h(qm + r) = (a, b)$.

Concluimos entonces que h es biyectiva, por lo que se cumple la tesis.

Otra forma (tal vez más directa) de ver que h es biyectiva es verificando que la función

$$(a, b) \mapsto g^{-1}(b)m + f^{-1}(a)$$

es su inversa. □

Sin embargo podemos observar que el principio del producto tal como lo hemos enunciado es más general que esto, ya que la Proposición 5.1.5 no contempla el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1.6. Un día el Turco decidió ofrecer otra promoción. Se trata de un plato principal entre las siguientes opciones: colita de cuadril al horno con puré, filete de merluza con ensalada o tarta de zapallitos. Con el plato principal se ofrece sin cargo la bebida con el siguiente criterio:

- La colita de cuadril (C) puede ir acompañada por vino tinto, gaseosa sabor cola o agua con gas.
- El filete de merluza (M) puede ir acompañado con vino blanco, jugo de naranja o agua sin gas.
- La tarta de zapallitos (Z) puede ir con licuado de frutas, jugo de naranja o agua sin gas.

Usando el principio del producto uno puede rápidamente concluir que las posibles combinaciones son $3 \cdot 3 = 9$. Podemos pensar que $A = \{C, M, Z\}$ es el conjunto de los platos principales, mientras que hay tres conjuntos diferentes de bebidas

- $B_C = \{\text{vino tinto}, \text{gaseosa cola}, \text{agua con gas}\}$
- $B_M = \{\text{vino blanco}, \text{jugo de naranja}, \text{agua sin gas}\}$
- $B_Z = \{\text{licuado de frutas}, \text{jugo de naranja}, \text{agua sin gas}\}$

Luego el conjunto de opciones no puede codificarse por un producto cartesiano de una forma directa.

En el ejemplo anterior $\{B_C, B_M, B_Z\}$ es una familia de conjuntos indexada en A, y una opción admisible por *El Turco* es un par (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B_x$. Generalizando esta observación podemos dar otra formulación del principio del producto:

Teorema 5.1.7 (Principio del producto)**.** *Sea I un conjunto finito con m elementos y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de conjuntos finitos tal que $\# A_i = n$ para todo $i \in I$. Pongamos $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$ y consideramos el conjunto*

$$X = \{(i, a) \in I \times \mathcal{A} : a \in A_i\}.$$

Entonces $\# X = m.n$

Demostración. Probaremos que $X \simeq I \times \{1, \ldots, n\}$, luego por la Proposición 5.1.5 se obtiene lo buscado.

Como para todo $i \in I$ se tiene que $\# A_i = n$, tenemos que existen funciones biyectivas $f_i : \{1, \ldots, n\} \to A_i$. Definimos entonces una función $h : I \times \{1, \ldots, n\} \to X$ por

$$h(i, k) = (i, f_i(k)).$$

Se deja como ejercicio verificar que esta función h es biyectiva. Luego el teorema queda demostrado. □

Se deja al lector la tarea de observar que esta nueva formulación del principio del producto se corresponde son la realizada al principio de la sección.

5.1.3. Principio de Inclusión-Exclusión

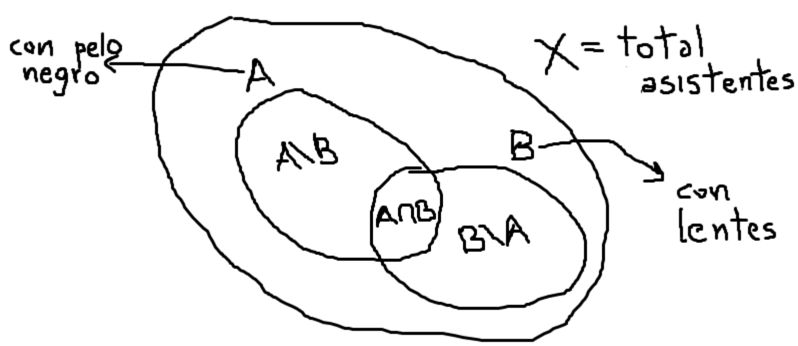
El principio de la suma resuelve el problema de contar los elementos de la unión de conjuntos disjuntos. Sin embargo este es un caso bastante particular y es natural preguntarse acerca de lo que sucede en caso de que los conjuntos que se están uniendo no sean disjuntos.

Ejemplo 5.1.8. Noche de música en vivo en el bar *El Turco*. Se presentaba una banda de blues llamada *La banda de Dieguito*. Con el propósito de controlar que el número de asistentes no sobrepasara el límite habilitado por las autoridades, el Turco contrató al Comadreja, un hombre algo extraño que había llegado al bar unos días atrás pidiéndole una changa.

Poco después de la medianoche el Turco se acercó a la puerta para preguntarle al Comadreja cuánta gente había entrado al local. Este le mostró una libreta donde tenía anotados algunos números. Según él, le había parecido aburrido contar una a una a todas las personas y prefirió hacerlo de forma indirecta. En su libreta aparecían los siguientes datos:

- 47 tienen pelo negro.
- 23 usan lentes.
- 17 usan lentes y tienen el pelo negro.
- 39 no tienen el pelo negro ni usan lentes.

Después de mostrarle estos números al Turco, el Comadreja sacó la lapicera que tenía apretada entre la oreja y el cráneo e hizo el siguiente dibujo:



Luego le explicó al Turco que había cuatro conjuntos disjuntos que considerar y que cada uno tenía su cardinal:

- $\#(A \cap B) = 17$
- $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) = 47 - 17 = 30$
- $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) = 23 - 17 = 6$

- $\#X \setminus (A \cup B) = \#(A \cup B)^c = 39$

Por el principio de la suma se tenía

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#(A \setminus B) + \#(B \setminus A) + \#(A \cap B) = 39 + 30 + 6 + 17 = 92.$$

Pero había otra forma de expresar esto:

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#A + \#B - \#(A \cap B). \tag{5.1}$$

Le explicó también que esta última igualdad se conocía como el principio de inclusión-exclusión.

- Fijate que al sumar los cardinales de A y B estás contando dos veces la intersección, por lo que tenés que restarle después el cardinal de esta para eliminar los repetidos, ¿entendés? - decía moviendo la lapicera sobre la hoja con entusiasmo.

Mientras el Comadreja conversaba de esto y se iba por las ramas entraron como 15 personas más sin que ninguno de los dos se diera cuenta. Adentro *La banda de Dieguito* tocaba *The thrill is gone.*

Ejercicio 5.1.9. Construir un ejemplo similar al anterior con tres conjuntos en lugar de dos y ver cómo quedaría la igualdad (5.1).

En general, para una cantidad finita arbitraria de conjuntos tenemos lo siguiente:

Teorema 5.1.10 (Principio de Inclusión-Exclusión)**.** *Consideremos $A_1, \ldots, A_k$ una familia de conjuntos finitos todos incluidos en un conjunto X. Luego*

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le k} \#(A_i \cap A_j)\right) + \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\le i\le k} A_i\right).$$

Demostración. Vamos a probarlo en por inducción en la cantidad de conjuntos k.

En el caso $k = 1$ la fórmula se reduce a $\#X = \#A_1^c + \#A_1$.

Supongamos ahora que el principio de inclusión-exclusión se cumple para cierto k y consideremos en X la colección de subconjuntos $A_1, \ldots, A_{k+1}$. Aplicando la formula a los primeros k conjuntos tenemos

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_i\right) - \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\le i\le k} A_i\right). \tag{5.2}$$

Observemos que

$$\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c = \left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c \cup \left(A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)\right).$$

Además la unión es disjunta, por lo que

$$\#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)^c = \#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k+1} A_i\right)^c + \#\left(A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)\right). \tag{5.3}$$

Por otro lado, aplicándole el principio de inclusión-exclusión para k subconjuntos al segundo sumando se tiene

$$\begin{aligned}\#A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right) = \#A_{k+1} - \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_{k+1} \cap A_i\right) \\ + \left(\sum_{1\leq i<j\leq k} \#(A_{k+1} \cap A_i \cap A_j)\right) - \cdots + (-1)^k \# \left(\bigcap_{1\leq i\leq k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

Combinando esto con las igualdades (5.2) y (5.3) obtenemos

$$\begin{aligned}\#X =& \#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k+1} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\leq i\leq k+1} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\leq i<j\leq k+1} \#(A_i \cap A_j)\right) + \\ &\cdots + (-1)^k \# \left(\bigcap_{1\leq i\leq k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

El principio de inducción prueba entonces el teorema. □

Otra formulación (quizá más útil desde el punto de vista práctico) del principio de inclusión-exclusión es la siguiente:

Principio de Inclusión-Exclusión: Consideremos un conjunto finito X con $\#X = N$ y un conjunto de condiciones c_i, con $i \in \{1, \ldots, k\}$, que pueden ser satisfechas o no por elementos de X. La cantidad de elementos que no satisfacen ninguna condición se denota por $\overline{N}$, y la cantidad de elementos que cumplen simultáneamente las condiciones $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$ se denota por $N(c_{i_1}, \ldots, c_{i_r})$. Luego se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\overline{N} =& N - (N(c_1) + \cdots + N(c_k)) \\ &+ (N(c_1, c_2) + \cdots + N(c_1, c_k) + N(c_2, c_3) + \cdots + N(c_{k-1}, c_k)) \\ &- \cdots + (-1)^k N(c_1, \ldots, c_k).\end{aligned}$$

Para mostrar una aplicación de este principio consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.11. Calculemos la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 1000 que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 ni de 5. Notamos por c_1, c_2 y c_3 la condición de ser múltiplo de 2, 3 y 5 respectivamente. Luego, siguiendo la notación mostrada anteriormente, vemos fácilmente que:

- $N(c_1) = \frac{1000}{2} = 500$

- $N(c_2) = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $N(c_3) = \frac{1000}{5} = 200$
- $N(c_1, c_2) = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$
- $N(c_1, c_3) = \frac{1000}{10} = 100$
- $N(c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$
- $N(c_1, c_2, c_3) = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33.$

Luego por el principio de inclusión-exclusión se tiene que la cantidad buscada es

$$1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266.$$

5.2. Permutaciones

Consideremos el siguiente problema:

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras A,B,C,D,E y F?.

Observamos lo siguiente: Para ocupar el primer lugar tenemos 6 posibilidades. Luego de hacer la primera elección nos quedan 5 posibilidades para ocupar el siguiente lugar. Entonces por el principio del producto, tenemos $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades para ocupar los dos primeros lugares. Siguiendo de este modo podemos concluir que la cantidad de formas de ordenar estas letras es $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Para generalizar y abstraer este problema observemos que el problema de contar las formas de ordenar n símbolos diferentes es equivalente al problema de contar reordenaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, es decir que existe una función biyectiva entre el conjunto de todas las posibles palabras formadas por el conjunto original de símbolos y el conjunto de todas las posibles reordenaciones de $\{1, \ldots, n\}$. Por esto nos concentraremos en este último conjunto, del que daremos una definición.

Podemos ver una reordenación de $\{1, \ldots, n\}$ como una función biyectiva, pues escribir la secuencia $3, 2, 4, 1, 5$ es equivalente a definir una función

$$f : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$$

de forma tal que $f(1) = 3$ (el tres ocupa el primer lugar), $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 5$. Definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es biyectiva}\},$$

y notamos $P_n = \#\mathcal{S}_n$. Decimos que P_n es el **número de permutaciones de** n **elementos**. Así la identificación de $\mathcal{S}_n$ con las formas de ordenar n queda

$$f \mapsto f(1)f(2)\dots f(n).$$

En el primer ejemplo vimos que $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Esto nos da una idea de lo que debe ser P_n para cualquier n. En general tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $P_n = n! = n.(n-1)\dots 2$.*

Demostración. Probaremos esto por inducción.

Observemos que para $n = 0$ se tiene $P_0 = 1$, puesto que la función nula es el único elemento de $\mathcal{S}_n$, entonces $P_0 = 0! = 1$.

Supongamos que $P_n = n!$. Luego observamos que ordenar el conjunto $\{1, \dots, n+1\}$ es un proceso que se puede hacer en dos pasos:

- Se coloca primero un elemento en el lugar $n + 1$. Para esto se tienen $n + 1$ posibilidades.
- Se ordenan los restantes n elementos en los primeros n lugares. Para esto se tienen $P_n = n!$ posibilidades.

Por el principio del producto se tiene $P_{n+1} = (n + 1).n! = (n + 1)!$. □

Podemos interpretar la prueba anterior en los términos del Teorema 5.1.7. Aquí el conjunto I es $\{1, \dots, n + 1\}$, y para cada $i \in I$ se tiene que

$$A_i = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\} : f \text{ es biyectiva}\}.$$

Se observa que $A_i \simeq \mathcal{S}_n$ para todo $i \in I$, por lo que $\#A_i = n!$. Luego el conjunto

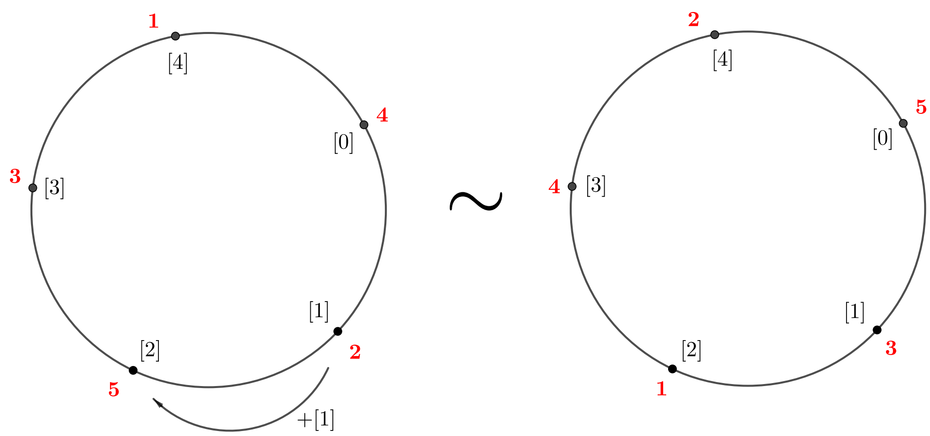
$$X = \{(i, f) : i \in I, f \in A_i\}$$

tiene cardinal $n!(n + 1) = (n + 1)!$. Por otro lado uno puede observar fácilmente que $\mathcal{S}_{n+1} \simeq X$, mediante la función biyectiva $f \mapsto (f(n+1), f|_{\{1,\dots,n\}})$.

Ejercicio 5.2.2. Una cantidad n de personas se sentaron alrededor de una de las mesas circulares del bar *El Turco* para jugar un juego de cartas. La silla ocupada por cada persona no tenía ninguna injerencia en el juego, sin embargo la persona que cada jugador tuviera a la derecha o a la izquierda sí que la tenía. A algunos metros de la mesa, el Comadreja se vio interesado por saber cuál sería el número de configuraciones posibles. Como no tenía papel dejó escrito el número en la mesa después de hacer algunos cálculos mentales. ¿Cuál es este número?

El número hallado en el ejercicio anterior es llamado **permutaciones circulares de n elementos**, al que podemos notar por PC_n. Vamos a aprovechar lo que sabemos de relaciones de equivalencia para expresar PC_n como el cardinal de un conjunto.

Observemos que la diferencia entre el proceso descrito en el Ejercicio 5.2.2 y las permutaciones es que los n elementos se ordenan de forma circular en lugar de ordenarse de forma lineal, por lo que se corresponde con una función con el mismo codominio (el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ correspondiente a los elementos a ordenar) pero con un dominio diferente (correspondiente a los lugares a ocupar). Para emular un dominio circular de n elementos consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_n$, es decir, el cociente de $\mathbb{Z}$ por la relación de congruencia módulo n.



En este caso observamos que sumar [1] corresponde a hacer un giro de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ (por lo que sumar $[k]$ es hacer un giro de $\frac{2\pi k}{n}$). Vamos a querer que una distribución de los números $\{1, \ldots, n\}$ en dicho círculo sea equivalente a una rotación de la misma, tal como se ve en la figura.

Teniendo en cuenta estas observaciones definimos en el conjunto

$$X = \{f : \mathbb{Z}_n \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es biyectiva}\}$$

la relación de equivalencia $\sim$ por

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f([x]) = g([x + k]) \text{ para todo } [x] \in \mathbb{Z}_n.$$

Luego PC_n es el cardinal del conjunto $X/\sim$.

Ejercicio 5.2.3. Observar que en general, si $\sim$ es una relación de equivalencia en un conjunto finito X, entonces $\#X$ es igual a la suma de los cardinales de todas las clases de equivalencia. Justificar la fórmula de permutaciones circulares a partir de este hecho.

5.3. Arreglos

En la sección anterior consideramos las formas de reordenar n símbolos diferentes, lo que es igual al cardinal del conjunto de funciones biyectivas de $\{1,\ldots,n\}$ en sí mismo. Variemos un poco esto y consideremos para dos números fijos $k \leq n$ el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(n,k) = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Luego escribimos $A_k^n = \#\mathcal{A}(n,k)$. Este número, llamado **arreglos de n elementos tomados de a k**, puede interpretarse como la cantidad de posibilidades de formar palabras de largo k usando n símbolos diferentes sin repetirlos. Hacemos aquí, al igual que en el caso de las permutaciones, la identificación

$$f \mapsto f(1)f(2)\ldots f(k).$$

Es claro que $A_n^n = P_n$.

Queremos encontrar una fórmula para A_k^n. Para esto observemos que definir una función $f \in \mathcal{A}(n,k)$ puede hacerse en dos pasos:

1. Se elige $f(1)$, para lo cual se tienen n posibilidades.
2. Se completan las imágenes de los restantes números $2,\ldots,k$. Para esto se tienen A_{k-1}^{n-1} posibilidades.

Del principio del producto obtenemos

$$A_k^n = n.A_{k-1}^{n-1} = n.(n-1).A_{k-2}^{n-2} = \cdots = n.(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejercicio 5.3.1. Inspirarse en la sección anterior y definir los **arreglos circulares de n elementos tomados de k**. Calcular una fórmula para esto.

5.3.1. Arreglos con repetición

Supongamos ahora que permitimos repeticiones en el caso anterior, es decir, consideramos palabras de largo k escritas en un abecedario de n letras. La cantidad de formas de hacerlo se denotará por AR_k^n, estos son los **arreglos con repetición de n elementos de largo k**. En este caso no es necesario que k sea menor o igual a n. Observar que este número es el cardinal del conjunto

$$\{1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,k\}} = \{f : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} : f \text{ función}\}.$$

Este es el producto cartesiano de $\{1,\ldots,n\}$ por si mismo k veces, luego por la regla del producto tenemos $\#AR_k^n = n^k$.

Observación 5.3.2. Veamos que $\{0,1\}^{\{1,\dots,k\}}$, el conjunto de arreglos con repetición de ceros y unos de largo k, es equipotente con $\mathcal{P}(\{1,\dots,k\})$. Observamos que dar un subconjunto de $\{1,\dots,k\}$ equivale a revisar uno a uno sus elementos eligiendo en cada caso si incluirlo o no en el subconjunto. Esto es asignarle a cada uno un 1 (si lo incluimos) o un 0 (si no lo incluimos). Luego ponemos

$$F:\{0,1\}^{\{1,\dots,k\}} \to \mathcal{P}(\{1,\dots,k\}),\ F(f)=f^{-1}(\{1\}).$$

Para ver que esta función es biyectiva alcanza con verificar que $G:\mathcal{P}(\{1,\dots,k\}) \to \{0,1\}^{\{1,\dots,k\}}$, definida por

$$G(A)(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in A \\ 0 & \text{si } x\notin A \end{cases}$$

es su inversa. Como conclusión tenemos que el cardinal de $\mathcal{P}(\{1,\dots,k\})$ es $AR_k^2=2^k$. Más en general se tiene que si X es un conjunto finito, entonces

$$\#\mathcal{P}(X)=2^{\#X}.$$

5.3.2. Cantidad de relaciones

Consideremos un conjunto finito $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. ¿Cuantas relaciones pueden definirse en X?

Para responder esta pregunta recordemos que el conjunto de las relaciones en X es equipotente con el conjunto de las matrices de $n\times n$ de ceros y unos (Ver Sección 3.3). Luego es este último conjunto el que tenemos que contar. Observamos que una matriz de ceros y unos te tamaño $n\times n$ es un arreglo con repetición de dos elementos de largo n^2. Luego existen 2^{n^2} relaciones en X.

Si ahora queremos contar la cantidad de relaciones en X que cumplan con cierta propiedad podemos mirar la caracterización de estas relaciones en términos de sus matrices asociadas (Ejercicio 3.3.2).

1. **Relaciones reflexivas:** Las relaciones reflexivas corresponden a las matrices que tienen 1 en todas las entradas de la diagonal. Luego los espacios que quedan libres son n^2-n, por lo que concluimos que la cantidad de estas relaciones es $2^{n^2-n}=2^{n(n-1)}$.

2. **Relaciones simétricas:** Las relaciones simétricas se corresponden con las matrices simétricas, es decir que quedan determinadas por las entradas que están por encima de la diagonal (diagonal incluida). La cantidad de estas entradas es

$$n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n.(n+1)}{2}.$$

   Luego la cantidad de relaciones simétricas en X es $2^{\frac{n.(n+1)}{2}}$.

3. **Relaciones antisimétricas:** Las relaciones antisimétricas corresponden a matrices (a_{ij}) que cumplen la condición

$$\text{Si } i \neq j \Rightarrow (a_{ij}, a_{ji}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}. \tag{5.4}$$

   Contar la cantidad de relaciones antisimétricas en X consiste entonces en contar las formas de:

   1º Poner un 0 o un 1 en cada lugar de la diagonal de una matriz de $n \times n$. Para esto tenemos 2^n posibilidades.

   2º Elegir para cada par (a_{ij}, a_{ji}), con $i < j$, alguno de los tres valores posibles. Aquí tenemos $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ posibilidades, puesto que hay $\frac{n(n-1)}{2}$ de estos pares (correspondientes a las entradas de la matriz por encima de la diagonal).

   Por el principio del producto tenemos que existen $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relaciones antisimétricas en X.

4. **Relaciones asimétricas:** Se deja como ejercicio.

Si comenzamos a combinar propiedades tenemos más familias de relaciones que contar. Por ejemplo uno podría preguntarse cuantas relaciones de orden o de equivalencia pueden definirse en cierto conjunto finito. Más adelante contaremos las segundas, mientras que dejamos como problema el contar las primeras.

5.4. Combinaciones

Nos interesa ahora estudiar una familia de problemas que consisten en elegir subconjuntos de un conjunto dado sin tener en cuenta el orden. Miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.4.1. Una persona entra a la heladería que queda frente al bar *El Turco* para comprar un cucurucho de tres sabores. Cuando llega al mostrador se encuentra con que tiene 20 diferentes sabores para elegir. ¿Qué posibilidades tiene de armar su helado?[3]

En general notaremos por C_k^n al número de formas de tomar k elementos de un conjunto de cardinal n y lo llamamos **combinaciones de n tomadas de a k** (puede encontrarse también en la literatura la notación $\binom{n}{k}$ para indicar esta cantidad). De esta forma el problema planteado en el ejemplo anterior consiste en calcular C_3^{20}.

[3]Suponemos que al cliente no le importa el orden en que se sirven los sabores, cosa que es a las claras un error, puesto que los sabores tienen diferente densidad y firmeza, y la discriminación en este sentido permite armar un helado más estable a fin de evitar eventos desafortunados.

Dicho de otra forma, C_k^n es el número de subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n. Para ser más precisos podemos escribirlo como el cardinal de

$$\mathcal{C}(n,k) = \{A \subset \{1,\dots,n\} : \#A = k\}.$$

Observación 5.4.2.

1. Hay algunos números combinatorios (así le llamaremos a los números C_k^n) que son muy fáciles de determinar. Por ejemplo es claro que $C_0^n = C_n^n = 1$, pues hay un solo subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ con 0 elementos y uno solo con n elementos. También puede verse que $C_1^n = n$, esto es, la cantidad de formas de tomar un subconjunto unitario de $\{1,\dots,n\}$.

2. Observar que $C_k^n = C_{n-k}^n$, ya que elegir un subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ es equivalente a elegir su complemento.

Teorema 5.4.3. *(Fórmula de Stiefel) Para $k \le n$ se tiene la siguiente igualdad*

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n.$$

Demostración. Existen dos tipos (disjuntos) de subconjuntos de k elementos de un conjunto de $n+1$ elementos:

- Conjuntos que contienen el elemento $n+1$. Estos conjuntos son C_{k-1}^n, porque para completarlos se necesitan tomar otros $k-1$ elementos de entre los restantes n.
- Conjuntos que no contienen al $n+1$. Estos son C_k^n.

Luego la tesis del teorema sale directamente del principio de la suma. □

A partir de la Fórmula de Stiefel podemos escribir los primeros números combinatorios:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & \\
 & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & \\
C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

La figura anterior es conocida como **Triangulo de Pascal**.

La siguiente proposición relaciona las combinaciones con los arreglos y las permutaciones.

Proposición 5.4.4. *Tomemos $k \leq n$. Luego se cumple la igualdad*

$$A_k^n = C_k^n . P_k. \tag{5.5}$$

Demostración. Aquí podemos usar el principio del producto y dividir la tarea de elegir una función inyectiva $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ en dos pasos:

1. Se elige la imagen de f, para lo que se tienen C_k^n posibilidades.
2. Se ordenan los elementos elegidos. De esta forma se define una función biyectiva entre $\{1, \ldots, k\}$ y $f(X)$, lo que termina de definir la función f. Para esto tenemos P_k posibilidades.

De lo anterior obtenermos (5.5). □

A partir de la igualdad (5.5) y las fórmulas de arreglos y permutaciones obtenemos la fórmula para las combinaciones:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \tag{5.6}$$

De esta forma podemos terminar el Ejemplo 5.4.1 concluyendo que el cliente tiene

$$C_3^{20} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140.$$

posibilidades de armar su helado.

Ejercicio 5.4.5. Probar la fórmula de Stiefel usando (5.6).

5.4.1. Teorema del binomio

Nos enfocamos ahora en el problema de calcular la n-ésima potencia de un binomio $x + y$. Veamos los primeros ejemplos:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^2$

Observamos que en los primeros ejemplos los coeficientes de los monomios corresponden a las primeras filas del triángulo de Pascal. Esto inspira el siguiente resultado:

Teorema 5.4.6 (Teorema del binomio)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k. \tag{5.7}$$

Daremos dos pruebas del Teorema del binomio. La primera será por inducción mientras que para la segunda usaremos un argumento puramente combinatorio.

Primera prueba del Teorema del binomio. Como vimos en los ejemplos, el caso para $n = 1$ ya está probado. Supongamos entonces que la fórmula (5.7) se cumple para cierto n. Luego

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y).\left(\sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(C_k^n x^{n+1-k} y^k + C_k^n x^{n-k} y^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}^n x^{n+1-k} y^k \\
&= C_0^n x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_k^n + C_{k-1}^n\right) x^{n+1-k} y^k + C_n^n y^{n+1}
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stiefel en el sumando del medio y las igualdades $C_0^n = C_0^{n+1} = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ en los otros, obtenemos

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1} x^{n+1-k} y^k.$$

La prueba termina usando el principio de inducción. □

Para escribir la segunda prueba veamos lo que sucede en le caso $n = 3$. Desarrollamos entonces $(x+y)^n$ de la siguiente manera:

1º. Del producto $(x+y)(x+y)(x+y)$ elegimos x en los tres factores, luego obtenemos x^3.

2º. Elegimos x de los dos primero e y del tercero. Obtenemos x^2y.

3º Elegimos x primeros y el tercero e y del cuarto. Obtenemos x^2y

4º Elegimos y del primero y x de los otros dos. Obtenemos x^2y.

Siguiendo de esta manera, los pasos 4,5 y 6 corresponden a elegir dos y y un x, y el séptimo a elegir y en todos los factores. Finalmente tenemos:

$$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Segunda prueba del Teorema del binomio. Generalizado la idea anterior vemos que elegir de cada uno de los n factores $(x+y)$ de $(x+y)^n$ una variable x o y se corresponde con elegir una función $f : \{1, \ldots, n\} \to \{x, y\}$. De esta forma por ejemplo $f(k) = x$ significa que estamos tomando x en el k-ésimo factor. Se tiene entonces

$$(x+y)^n = \sum_{f \in X} f(1) \ldots f(n),$$

donde $X = \{x, y\}^{\{1,\ldots,n\}}$ es el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ a $\{x, y\}$.

El coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en el desarrollo es exactamente la cantidad de funciones f que cumplen $f(1) \ldots f(n) = x^{n-k}y^k$, es decir, el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \#f^{-1}(y) = k\}.$$

Este es equipotente con $\{A \subset \{1, \ldots, n\} : \#A = k\}$, luego el coeficiente que estamos buscando es C^n_k. $\square$

Ejercicio 5.4.7. Escribir el desarrollo de $(x-y)^n$.

5.4.2. Combinaciones con repetición

Supongamos ahora que tenemos X un conjunto con n elementos y tomamos k de ellos permitiendo repeticiones. Este número, al que notamos por CR^n_k, será llamado **combinaciones con repetición de n tomadas de a k**. Es claro que CR^n_k sólo depende del cardinal de X, por lo que siempre puede suponerse $X = \{1, \ldots, n\}$.

Notar que CR^n_k puede interpretarse como la cantidad de posibles soluciones de la ecuación

$$x_1 + \cdots + x_n = k,$$

con variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Aquí x_i corresponde al número de veces que se elije el elemento i. Luego podemos escribir

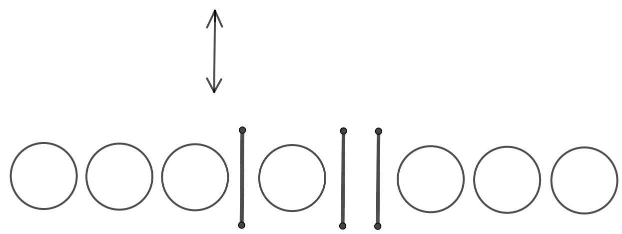
$$CR^n_k = \#\mathcal{CR}(n,k) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Ejercicio 5.4.8. Observar que CR^n_k también puede verse como la cantidad de formas que se tienen de meter k pelotas iguales en n cajas distintas.

Con el fin de obtener una fórmula para CR^n_k mostraremos una interpretación más de este número.

Observar que meter k pelotas iguales en n cajas diferentes es equivalente con poner las n pelotas en fila (representadas por los unos) y poner entre ellas $n-1$ separaciones (los ceros). Luego la cantidad de pelotas que quedan antes de la primer separación se corresponde con la cantidad asignada a la primera caja, la cantidad de pelotas entre la primera y la segunda separación se asigna a la segunda caja y así sucesivamente. Puede interpretarse esto como una secuencia formada por dos símbolos, tanto pueden ser pelotas y separaciones como unos y ceros. Un ejemplo de esto se ve en la siguiente figura.

$$\{1,1,1,0,1,0,0,1,1,1\} \sim 3+1+0+3=7$$



Proposición 5.4.9. *El conjunto $\mathcal{CR}(n,k)$ es equipotente con el conjunto de todas las $(n+k-1)$-uplas formadas por k unos y $n-1$ ceros.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{X}$ al segundo conjunto y definamos una función biyectiva $f : \mathcal{CR}(n,k) \to \mathcal{X}$ de la siguiente forma: los primeros x_1 lugares de $f(x_1,\dots,x_n)$ los ocupan unos, luego ponemos un cero; los siguientes x_2 son unos, y volvemos a poner un cero para separar; así seguimos hasta en final.

De forma equivalente (y más precisa): ponemos un cero en los lugares de la forma $x_1+\ldots+x_h+h$ para todo $h=1,\dots,n-1$ y completamos el resto con unos.

Se deja como ejercicio probar que la función descrita es biyectiva. □

De la Proposición 5.4.9 se puede deducir la fórmula

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Resumiendo, el número CR_k^n puede verse como cantidad de:

- formas de elegir k elementos de un conjunto de n permitiendo repeticiones.

- soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.

- maneras de distribuir k objetos iguales en n recipientes distintos.

- Palabras de largo $n + k - 1$ que se pueden formar con dos símbolos repitiendo k veces uno de ellos y $n - 1$ veces el otro.

5.5. Otras cantidades interesantes

5.5.1. Permutaciones con repetición

Ejemplo 5.5.1. El Turco estaba sentado detrás del mostrador con un frasco en la mano izquierda y la vista fija en la etiqueta. La otra mano alternaba tareas, de a ratos rascaba su pelada y de a ratos ahuyentaba una mosca que volaba cerca del frasco atraída por el azucarado contenido.

"MERMELADA" leyó en la etiqueta como por centésima vez, y lo leyó con mayúsculas, sobreactuando la pronunciación como quién le enseña a un niño una palabra difícil.

Desde que el Comadreja le había enseñado el asunto de las permutaciones no había parado de contar ordenaciones: de los borrachos acodados a lo largo del mostrador, de las botellas en el tercer estante o los trofeos de campeonatos de truco y escoba de quince en el último. Pero se había topado con un problema nuevo con la palabra MERMELADA, pues la repetición de la M, la E y la A hacía que al aplicar la fórmula que el otro le había enseñado estuviera contando siempre de más.

Podemos imaginarnos una gran familia de ejemplos que consisten, en esencia, en este mismo problema: contar las formas de ordenar n símbolos sabiendo que estos se repiten con frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ (suponemos aquí que $n_1 + \cdots + n_k = n$). La cantidad descrita es llamada **permutaciones de n elementos con repeticiones de frecuencias** $n_1, \ldots, n_k$, y se denota por $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$. Este número puede verse como el cardinal del conjunto

$$\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k} = \left\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \# f^{-1}(i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \right\},$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Vamos a obtener una fórmula para $P_{n;n_1,\ldots,n_k}$ usando el principio del producto. Observemos que el proceso de ordenar k símbolos $A_1, \ldots, A_k$ con repeticiones $n_1, \ldots, n_k$ puede hacerse en los siguientes pasos:

1. Elegimos los lugares que ocuparán los n_1 símbolos A_1 entre los n lugares disponibles. Para esto tenemos $C^n_{n_1}$ posibilidades.

2. Colocamos los símbolos $A_2, \ldots, A_k$ en los $\tilde{n}_1 = n_2 + \ldots + n_k$ lugares restantes. Para esto tenemos $P_{\tilde{n}_1;n_2,\ldots,n_k}$ posibilidades.

Luego el principio del producto nos da la igualdad

$$P_{n;n_1,\dots,n_k} = C^n_{n_1}.P_{\tilde{n}_1;n_2,\dots,n_k} \tag{5.8}$$

Notamos $\tilde{n}_i = n_{i+1} + \cdots + n_k$. Entonces usando (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} P_{n;n_1,\dots,n_k} &= C^n_{n_k}.P_{\tilde{n}_1;n_2,\dots,n_k} = C^n_{n_1}.C^{\tilde{n}_1}_{n_2}P_{\tilde{n}_2;n_3,\dots,n_k} = \cdots = C^n_{n_1}.C^{\tilde{n}_1}_{n_2}\dots C^{\tilde{n}_{k-1}}_{n_k} \\ &= \frac{n!}{\tilde{n}_1.!n_1!}\cdot\frac{\tilde{n}_1!}{\tilde{n}_2!.n_2!}\cdot\frac{\tilde{n}_2!}{\tilde{n}_3!.n_3!}\cdots\frac{\tilde{n}_{k-1}!}{\tilde{n}_k!.n_k!} = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}. \end{aligned}$$

Usando esta fórmula podemos rápidamente resolver el problema planteado al principio. Observar que las repeticiones correspondientes a las letras M, E, R, L, A y D son $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$ y $n_6 = 1$, luego la cantidad buscada es

$$P_{9;2,2,1,1,2,1} = \frac{9!}{2!,2!,1!,1!,2!,1!} = \frac{362880}{8} = 45360.$$

Ejercicio 5.5.2. Escribir una prueba de la fórmula de permutaciones con repetición usando inducción y la igualdad (5.8).

Usemos ahora las permutaciones con repetición para generalizar el teorema del binomio (Teorema 5.4.6).

Teorema 5.5.3 (Teorema Multinomial)**.** *El coeficiente del monomio $x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}$ en el desarrollo $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ es*

$$P_{n;n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\dots n_k!}.$$

Observar que si $k = 2$ se deduce de aquí que $C^n_{n_1} = P_{n;n_1,n_2}$.

Demostración. Siguiendo la idea de la prueba combinatoria del Teorema 5.4.6 observamos que

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{f\in X} f(1)\dots f(n),$$

donde $X = \{x_1, \dots, x_k\}^{\{1,\dots,n\}}$. Tenemos entonces que el coeficiente de $x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}$ en el desarrollo es el cardinal del conjunto

$$\{f \in X : \#f^{-1}(x_i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \dots, k\},$$

que es $P_{n;n_1,\dots,n_k}$ ya que el conjunto descrito es claramente equipotente con $\mathcal{S}_{n;n_1,\dots,n_k}$. □

Para ilustrar la demostración anterior supongamos que $n = 5$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 1$ y que queremos formar $x_1^2x_2x_3^2$. Una manera de obtener este monomio es haciendo la siguiente elección (marcada en negrita):

$$(x_1+x_2+x_3)^5 = (x_1+x_2+\mathbf{x_3}).(x_1+\mathbf{x_2}+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(x_1+x_2+\mathbf{x_3}).$$

Esto se identifica con la palabra $x_3x_2x_1x_1x_3$. Luego las formas de obtener dicho monomio en el desarrollo están en biyección con el conjunto de las palabras de largo cinco que se pueden formar con tres letras repitiendo dos veces x_1 y x_3. Esta cantidad es, como ya vimos, $P_{5;2,2,1}$.

Ejercicio 5.5.4. Escribir una prueba por inducción del teorema multinomial.

5.5.2. Desordenes

Consideramos aquí el siguiente problema: dada una palabra formada por n símbolos diferentes, ¿cuántas palabras se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original? Llamaremos a este número **desordenes de** n **elementos** y lo notaremos por D_n. Observamos que este número es el cardinal del conjunto

$$\mathcal{D}_n = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ biyctiva}, f(i) \neq i \text{ para todo } i\}$$

Una forma de hallar D_n es usando el principio de inclusión-exclusión. Para esto definimos

$$A_i = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ biyectiva}, f(i) = i\}.$$

Entonces $\mathcal{D}_n = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P_{n-k}$ y que hay C_k^n intersecciones de esta forma, luego

$$D_n = P_n - nP_{n-1} + C_2^n P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_i^n P_{n-i}.$$

5.5.3. Cantidad de funciones sobreyectivas

Nos preguntamos ahora cuantas funciones sobreyectivas pueden definirse de un conjunto de n elementos en un conjunto de k elementos ($k \leq n$), es decir, cuál es el cardinal de

$$\{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\} : f \text{ sobreyectiva}\},$$

al que notamos por $Sob(n, k)$.

Para encontrar una fórmula para este número usaremos el principio de inclusión-exclusión. Consideramos entonces $Z = \{1, \dots, k\}^{\{1,\dots,n\}}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, k\}$, que tiene cardinal k^n, y los subconjuntos

$$A_i = \{f \in Z : i \notin f(\{1, \dots, n\})\}.$$

Es claro que el conjunto de funciones sobreyectivas es $\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)^c$. Observamos que

$\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = (k-\ell)^n$ y que hay C_ℓ^k intersecciones de esta forma. Luego tenemos

$$\begin{aligned} Sob(n,k) &= k^n - C_1^k(k-1)^n + C_2^k(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}C_{k-1}^k 1^n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_i^k (k-i)^n. \end{aligned}$$

El número

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} Sob(n,k)$$

se llama **número de Stirling de segunda especie** y denota la cantidad de particiones de k subconjuntos que pueden hacerse en un conjunto de n elementos. El número total de particiones se conoce como el n-ésimo **número de Bell** y se denota por

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Este puede interpretarse también como el número de relaciones de equivalencia que es posible definir en un conjunto con n elementos.

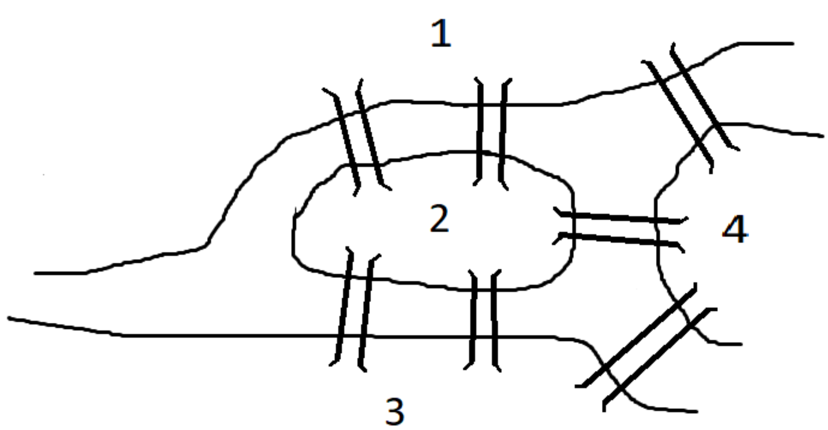
Capítulo 6

Grafos

Para motivar este capítulo presentaremos dos problemas. El primero es un problema célebre que data del siglo XVI y que, según se considera, da origen a la teoría de grafos. El segundo es un problema lúdico que circula entre los escolares (o circulaba en alguna época y alguna escuela).

1. Problema de los puentes de Königsberg

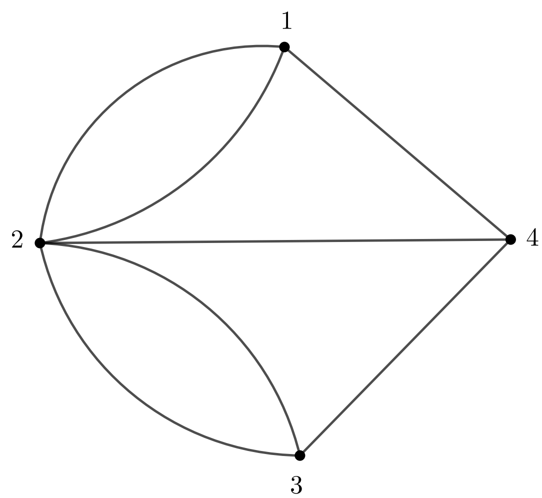
La ciudad de Königsberg (antigua capital de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, sobre el que se disponían siete puentes como se muestra a continuación:



En este escenario se plantea el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todos los puentes pasando por cada uno una única vez y terminando el recorrido en el punto de partida?

Es posible resolver el problema por fuerza bruta, es decir, listando todos los posibles recorridos que no repitan puentes y verificando si entre ellos hay uno que cumpla las condiciones. Sin embargo el matemático suizo Leonard Euler dio una solución en el año 1736 (en una publicación titulada *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) que puede generalizarse a toda una familia de problemas similares a este.

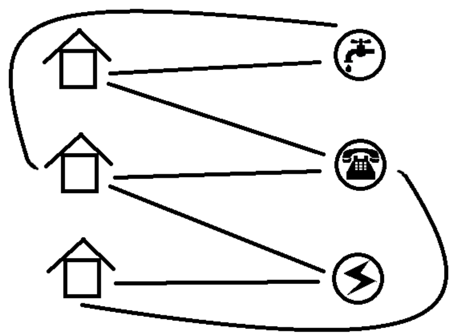
El primer paso en el análisis del problema consiste en simplificar el contexto hasta quedarse con los elementos escenciales del mismo. Observamos entonces que hay dos tipos de objetos en el problema: las regiones y los puentes. Se puede entonces representar el mapa anterior por medio de la siguiente figura, donde las regiones son representadas por puntos y los puentes por aristas. A los efectos del problema que estamos considerando no hay diferencia entre el mapa y esta figura (a la que vamos a denominar *grafo*, o más especificamente en este caso, *multigrafo*).



En la actualidad la disposición de los puentes es diferente a la descrita, por lo que el problema ha cambiado. El lector puede plantearse entonces, además del propuesto, el problema de los puentes de Kaliningrado.

2. Problema de la conexión de servicios básicos en el plano

Se disponen en un territorio plano tres casas y tres usinas de servicios públicos: agua, telefonía y electricidad. El problema consiste en conectar las tres casas a los tres servicios mediante conectores independientes (cables o ductos) que no se corten entre sí. (Como nos encontramos en un mundo plano, no es posible pasar un cable por encima de otro.)



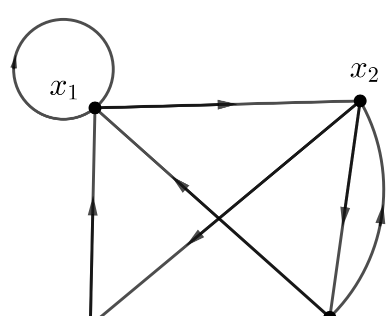
Hay una diferencia escencial entre el primer problema y el segundo. Mientras que el primero depende solamente de la estructura del grafo, es decir, de como están conectados los puntos con aristas, en el segundo se agrega una nueva circunstancia: el hecho de que el grafo está contenido en el plano. Veremos más adelante que estos corresponden a dos tipos diferentes de problemas más generales y mostraremos sus soluciones.

6.1. Primeras definiciones y ejemplos

Un **grafo dirigido** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito al que llamamos conjunto de **vértices** y E es un subconjunto de $V \times V$ al que llamamos conjunto de **aristas**.

El conjunto de aristas no es otra cosa que una relación en el conjunto de vértices, luego tenemos una nueva representación (esta vez geométrica) de las relaciones definidas en un conjunto. Por ejemplo, para el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ podemos representar la relación $\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Nos interesa también defnir grafos no dirigidos, es decir, que tengan aristas no orientadas. Para esto debemos reemplazar los pares ordenados por pares no ordenados.

Dados dos conjuntos X e Y consideramos su **producto simétrico**[1] como el conjunto

$$X \cdot Y = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}.$$

Un **grafo no dirigido** (también llamado simplemente **grafo**) es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset V \cdot V$. Las aristas de la forma $\{x, x\} = \{x\}$ se denominan **lazos**

Observar que de forma similar al caso de los grafos dirigidos, un grafo no dirigido puede definirse como un conjunto de vértices V junto con una relación simétrica E en V.

En general usaremos la notación $G = (V, E)$ tanto para grafos dirigidos como para grafos no dirigidos. Escribimos también en este caso $V(G) = V$ y $E(G) = E$.

Decimos que dos vértices x y y de un grafo G (no dirigido) son **adyacentes** si $\{x, y\}$ es una arista del grafo.

6.1.1. Isomorfismos de grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un **isomorfismo de grafos** si

(i) f es biyectiva, y

(ii) $\{x, y\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Es decir, dos vértices son adyacentes si y sólo si sus imágenes por f lo son.

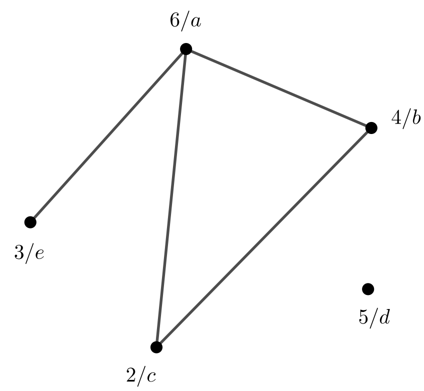
Observar que si $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos, entonces queda definida automaticamente una función biyectiva $f : E_1 \to E_2$ (usamos la misma notación que para la función en los vértices). Luego notamos al isomorfismo por $f : G_1 \to G_2$ entendiendo esto como una correspondencia tanto entre lo vértices como entre las aristas de ambos grafos. Emplearemos la notación $G_1 \cong G_2$ para indicar que ambos grafos son **isomorfos**, es decir, si existe un isomorfismo entre ellos.

Ejemplo 6.1.1. Consideramos los siguientes grafos:

- $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y E_1 definido por x e y son adyacentes si x e y tienen algún divisor primo en común.
- $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ y $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}\}$.

[1]Esta nomenclatura no es estandar.

Definimos $f : V_1 \to V_2$ por $f(2) = c$, $f(3) = e$, $f(4) = b, f(5) = d$ y $f(6) = a$. Puede verse que f es un isomorfismo entre los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.



Observar que f no es el único isomorfismo entre ambos grafos. Por ejemplo uno puede considerar $g : V_1 \to V_2$ por $g(2) = b$, $g(3) = e$, $g(4) = c$, $g(5) = d$ y $g(6) = a$. ¿Hay algún otro isomorfismo?

Si G_1 y G_2 son grafos dirigidos, entonces la definición de isomorfismo es análoga. La única modificación que hay que hacer es cambiar los pares en (ii) por pares ordenados.

Ejercicio 6.1.2. Observar que el isomorfismo de grafos define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o grafos dirigidos.

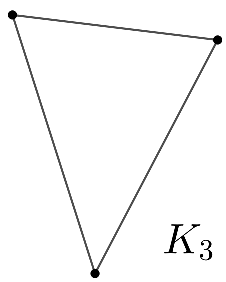
En el ejercicio anterior no pedimos probar que el isomorfismo define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los grafos porque este no existe como tal, es decir que la clase de todos los grafos no es un elemento de la teoría de conjuntos. Sin embargo sí es cierto que existe un conjunto de grafos $\mathcal{G}$ tal que dado cualquier grafo G, existe un grafo $G' \in \mathcal{G}$ que es isomorfo a G. Es decir que $\mathcal{G}$ es un conjunto completo de representantes de todas las clases de isomorfismo. (Por ejemplo puede definirse $\mathcal{G}$ como el conjunto de todos los grafos que tienen vértices en un conjunto infinito X dado.) Luego cuando digamos que algo es una relación de equivalencia u orden en cualquier familia de grafos podemos pensar que esta familia es este conjunto $\mathcal{G}$.

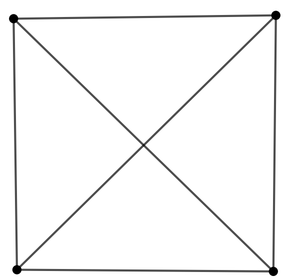
En general nos interesarán, más que los grafos, las clases de isomorfismos de grafos. Por ejemplo, al mirar los grafos del Ejemplo 6.1.1, veremos los números y las letras simplemente como puntos que están unidos de a pares. Adoptaremos entonces la mirada que se plantea al principio del capítulo con el problema de los puentes de Königsberg, en el cual uno se olvida de que está trabajando con regiones y puentes y ve sólo un conjunto de vértices unidos por un conjunto de aristas.

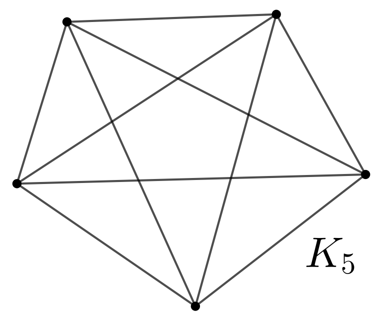
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **completo** si $E = (V \cdot V) \setminus D$, donde

$$D = \{\{x, x\} : x \in V\}$$

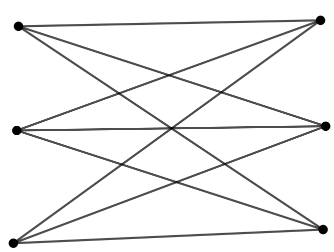
es el conjunto de los lazos en V. Es decir que es el grafo sin lazos de vértices V con el máximo número de aristas. Podemos observar que la clase de isomorfismo de un grafo completo sólo depende del número de vértices, es decir para cada $n \geq 1$ todos los grafos completos con n vértices son isomorfos. Luego notamos por K_n a cualquiera de ellos (o a todos ellos).


K_3


K_4


K_5

Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $E = V_1 \cdot V_2$. Haciendo la misma consideración que para el grafo completo, ponemos la notación $K_{n,m}$ para referirnos al grafo bipartito con vértices $V = V_1 \cup V_2$ con $\#V_1 = n$ y $\#V_2 = m$.


$K_{3,3}$

6.1.2. Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido). Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.

Si fijamos un grafo (o grafo dirigido) G, podemos notar el conjunto de los subgrafos de G como $\mathcal{S}(G)$ y definir en este la siguiente relación de orden:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2.$$

Puede verse que en general esta relación de orden no es total y que tiene al grafo vacío como mínimo y al grafo G como máximo. En adelante, cuando consideremos el máximo/mínimo subgrafo de G que cumpla determinada propiedad P nos referiremos al máximo/mínimo para el orden $\leq$ del conjunto

$$\mathcal{S}(G,P) = \{G' \in \mathcal{S}(G) : G' \text{ satisface } P\}.$$

Un **encaje** de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ en otro grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función inyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que si $x, y \in V_1$ son adyacentes, entonces $f(x), f(y) \in V_2$ son adyacentes. Denotamos también al encaje por $f : G_1 \to G_2$, y por $f : E_1 \to E_2$ a la función inducida en las aristas. De forma similar se define un encaje de un grafo dirigido en otro.

Dados dos grafos (o grafos dirigidos) G_1 y G_2 escribimos

$$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2.$$

Proposición 6.1.3. *Se tiene que $G_1 \preceq G_2$ si y sólo si existe G_1' un subgrafo de G_2 que es isomorfo a G_1.*

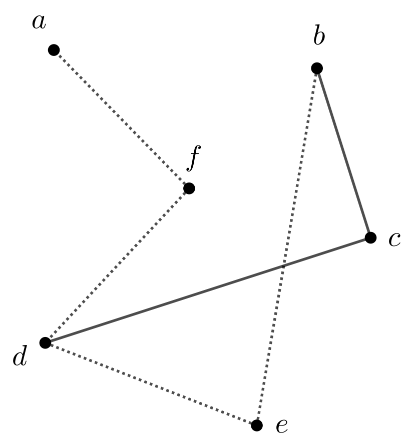
Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que tenemos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, y que $f : G_1 \to G_2$ es un encaje. Luego definimos el subgrafo $G_1' = (f(V_1), f(E_1))$. Es claro por la definición de encaje que f define un isomorfismo entre G_1 y G_2'.

($\Leftarrow$) Un isomorfismo $f : G_1 \to G_1'$ (con $G_2' \leq G_2$) se extiende de forma obvia a un encaje $f : G_1 \to G_2$. $\square$

Como en realidad nos interesa trabajar con las clases de isomorfismo de grafos, diremos también que G_1 es subgrafo de G_2 si $G_1 \preceq G_2$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido) y $V' \subset V$ un subconjunto cualquiera. El **subgrafo generado** por V' es el máximo subgrafo de G que tiene a V' como conjunto de vértices.

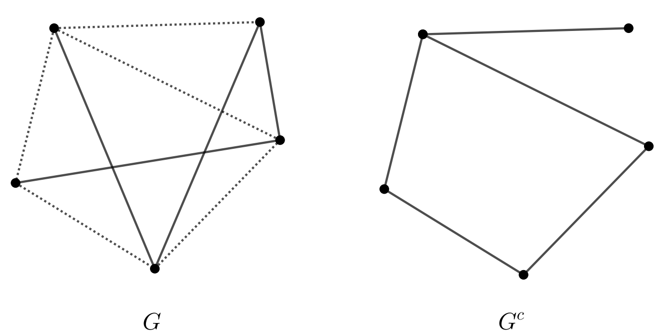
En la siguiente figura puede verse el grafo generado por los vértices b, c y d de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E = \{\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$.



Definimos el **complemento** de un grafo sin lazos $G = (V, E)$ como el grafo

$$G^c = (V, (V \cdot V) \setminus (E \cup D)),$$

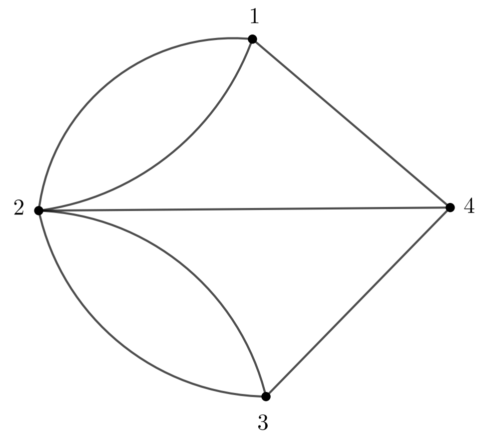
donde D es el conjunto de lazos en V. Es decir que es el grafo que resulta de sacarle a K_n las aristas de G, donde $n = \#V$.



Ejercicio 6.1.4. Probar que si G_1 y G_2 son dos grafos tales que $V(G_1) = V(G_2)$, entonces $G_1 \leq G_2$ implica $G_2^c \leq G_1^c$. Concluir que si G_1 y G_2 tienen la misma cantidad de vértices, entonces $G_1 \preceq G_2$ implica $G_2^c \preceq G_1^c$.

6.1.3. Multigrafos

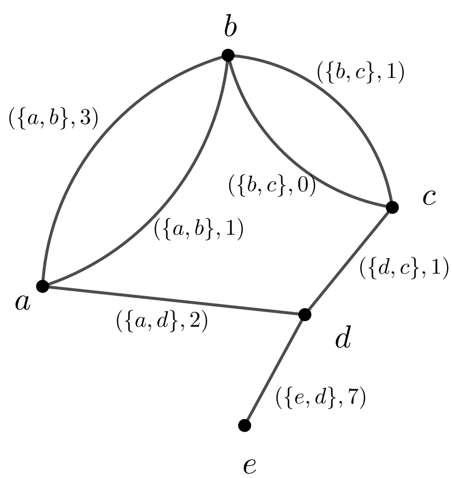
Volvamos al problema de los puentes de Königsberg y a la forma de modelarlo.

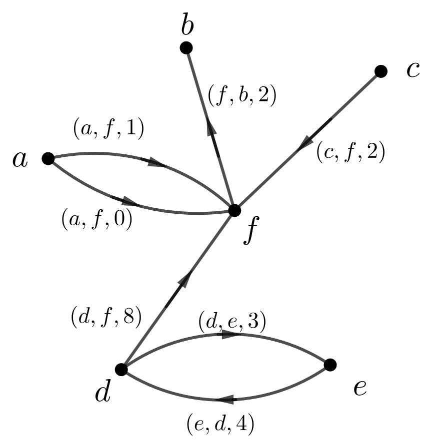


Como podemos ver, hay dos aristas entre 1 y 2 y dos aristas entre 2 y 3, luego la figura anterior no se ajusta a nuestra definición de grafo. Haremos entonces las siguientes definiciones:

Un **multigrafo** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \cdot V) \times \mathbb{N}$.

Un **multigrafo dirigido** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \times V) \times \mathbb{N}$.



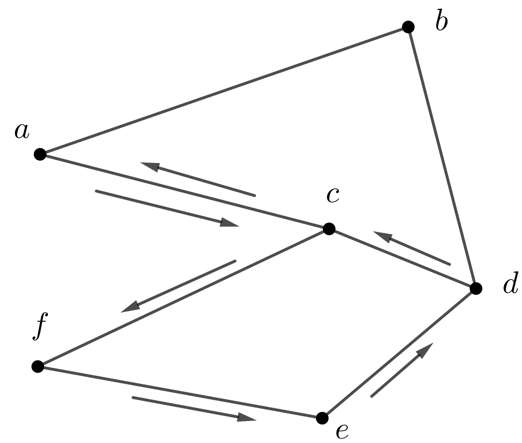


Ejercicio 6.1.5. Escribir las definiciones (tanto en el caso dirigido como en el caso no dirigido) de:

- isomorfismo de multigrafos,
- encaje de un multigrafo en otro,
- sub-multigrafo, y
- sub-multigrafo generado.

6.2. Caminatas en grafos

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tal que x_{i-1} es adyacente a x_i para todo $i = 1, \ldots, n$. En este caso decimos que el camino une x_0 con x_n. Si $x_0 = x_n$ el camino se dice **cerrado**.



(a, c, f, e, d, c, a)

La **longitud** del camino es, en este caso, el número n (la cantidad de aristas por las que se pasa). El camino cerrado (x_0) se llama **tirivial** y su longitud es 0.

Decimos que un camino es un **recorrido** si no repite aristas, y que es un **camino simple** si no repite vértices. Llamaremos **circuito** a un recorrido cerrado y **ciclo** a un camino simple cerrado. Observar que un camino simple abierto (no cerrado) es un recorrido. También sucede que un ciclo de longitud mayor o igual a tres es un circuito.

Proposición 6.2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $x, y \in V$. Si existe un camino que une x con y, entonces existe un camino simple que une ambos puntos.*

Demostración. Supongamos que tenemos un camino de largo n desde x a y. Consideramos entonces el conjunto de todos los caminos de x a y con longitud menor o igual a n, al que notamos por $\mathcal{C}_n$. Es claro que este conjunto es no vacío, además es finito porque V es finito. Luego existe un camino $c = (x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y)$ que minimiza la longitud de todos los elementos de $\mathcal{C}_n$.

Si c no es un camino simple, entonces existen dos índices diferentes $i, j \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $x_i = x_j$. Suponiendo que $i < j$ podemos observar que $c' = (x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k, lo que contradice el hecho de que k es el mínimo de las longitudes de los caminos en $\mathcal{C}_n$. Concluimos entonces que c debe ser un camino simple. $\square$

Ejercicio 6.2.2. Probar que un grafo bipartito no puede tener ciclos de largo impar.

Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **conexo** si para todo par de vértices $x, y \in V$, existe un camino que los une.

Dado un grafo $G = (V, E)$ podemos definir la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de los vértices de la siguiente manera:

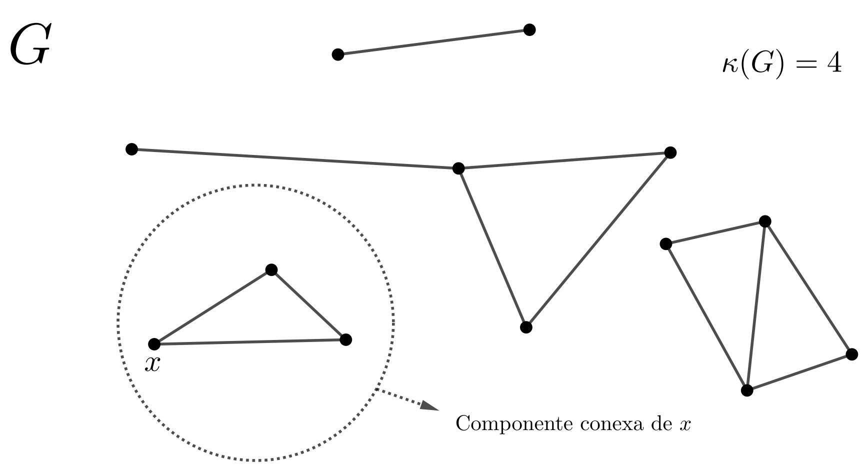
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{ existe un camino que une } x \text{ con } y.$$

Puede observarse que la relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia (se deja como ejercicio).

La **componente conexa** de un vértice $x \in V$ es el subgrafo de G generado por el subconjunto de vértices $[x] \subset V$ ($[x]$ denota la clase de equivalencia de x para $\mathcal{R}$).

Ejercicio 6.2.3. Probar que la componente conexa de un vértice x de un grafo es el máximo subgrafo conexo que contiene a x.

Usaremos la notación $\kappa(G)$ para indicar el número de componentes conexas del grafo G, que coincide con el cardinal del cociente $V/\mathcal{R}$. Observar que G es conexo si y sólo si $\kappa(G) = 1$.



Hay una noción de distancia natural en los grafos conexos que está relacionada con la noción de longitud: Para un par de vértices $x, y \in V$ tomamos $\mathcal{C}(x, y)$ el conjunto de los caminos que unen a x con y, luego definimos

$$dist(x, y) = \text{mín}\{long(c) : c \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

Observación 6.2.4. En general, una **distancia** o **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que cumple:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.
- Dados tres puntos x, y, z, se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Esta es la desigualdad triangular.)

Luego $dist : V \times V \to \mathbb{N}$ es efectivamente una distancia.

El diámetro de un grafo conexo $G = (V, E)$ es

$$\text{Diam}(G) = \text{máx}\{dist(x, y) : x, y \in V\}.$$

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido también se pueden considerar en él caminos, recorridos y caminos simples. Sin embargo en este caso $dist$ no resulta una verdadera distancia en los vértices ya que no se cumple la segunda condición de la Observación 6.2.4.

Para dar un camino en un multigrafo debemos especificar cuál de las aristas se toma al unir dos vértices adyacentes. Teniendo esto en cuenta definimos un **camino** en un multigrafo $G = (V, E)$ como una secuencia

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n)$$

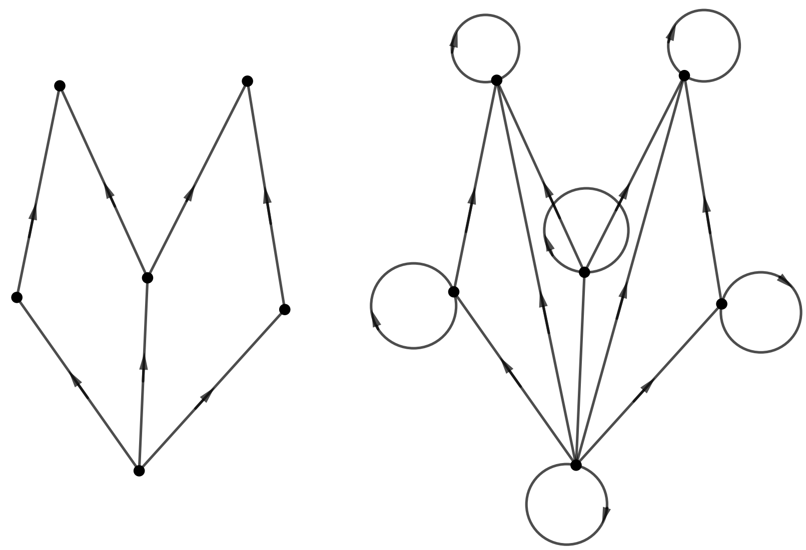
donde $x_1, \ldots, x_n \in V$ y para cada $i = 0, \ldots, n-1$, e_i es una arista que une x_i con x_{i+1}. Para multigrafos dirigidos la definición es análoga.

Luego de tener esta definición se hacen de forma obvia las definiciones de **camino cerrado**, **recorrido**, **circuito, camino simple** y **ciclo** en un multigrafo o multigrafo dirigido.

Observación 6.2.5. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido sin ciclos, entonces puede definirse una relación de orden en V de la siguiente forma:

$$x \leq y \Leftrightarrow \text{existe un camino de } x \text{ a } y. \tag{6.1}$$

Por otro lado un conjunto ordenado puede verse como un grafo dirigido sin ciclos (sacando los lazos). Sin embargo, si $\leq$ es una relación de orden en V, entonces existe más de un grafo que genera $\leq$ mediante (6.1).



En la figura anterior pueden verse grafos dirigidos que generan la misma relación de orden $\mathcal{R}$.

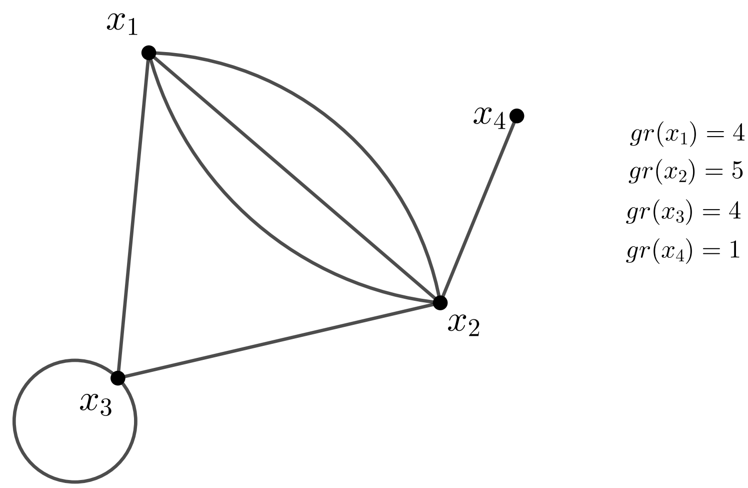
6.2.1. Recorridos y circuitos Eulerianos

Recordamos nuevamente el problema de los puentes de Königsberg. Este cosiste en encontrar (o probar la inexistencia de) un ciruito que pase por todas las aristas de un multigrafo.

Diremos que un recorrido o un circuito en un multigrafo no dirigido G es **Euleriano** si pasa por todas las aristas del multigrafo. La generalización del problema de los puentes de Königsberg puede enunciarse de la siguiente forma:

Problema 6.2.6. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo no dirigido conexo. ¿Existe un recorrido Euleriano en G? ¿Y un circuito Euleriano?*

El **grado** de un vértice x en un multigrafo G, notado por $gr(x)$, es el número de aristas que inciden en el vértice. Un lazo en x cuenta doble.



Proposición 6.2.7. *Si $G = (V, E)$ es un multigrafo, entonces*

$$\sum_{x \in V} gr(x) = 2\#E.$$

Demostración. Simplemente observamos que cada lazo contribuye a sumar dos al grado de un vértice y cada arista que une dos vértices suma uno en el grado de cada uno de ellos. □

El siguiente teorema resuelve el Problema 6.2.6.

Teorema 6.2.8. *Un multigrafo conexo G admite un circuito Euleriano si y solo si el grado de todos sus vértices es par.*

Para simplificar la prueba probaremos antes el siguiente lema:

Lema 6.2.9. *Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo conexo. Entonces existe un vértice x_0 que no desconecta G, es decir que el subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$ es conexo.*

Demostración. Probaremos por inducción en $n = \#V \geq 2$ la siguiente propiedad ligeramente más fuerte: Dado un vértice $x_0 \in V$ existe otro vértice $x_1 \in V \setminus \{x_0\}$ que no desconecta a G. Esto es claro para $n = 2$.

Supongamos que es cierto para $m < n$ y tomemos $x_0 \in V$. Si $x \in V \setminus \{x_0\}$ tenemos dos casos: si x no desconecta el grafo no hay nada más que probar. Si no es así tomamos $G_1 = (V_1, E_1)$ una componente conexa del grafo generado por $V \setminus \{x_0\}$ que no contiene a x_0 y luego $\tilde{G_1}$ el grafo generado por $V_1 \cup \{x\}$. Usanto la hipótesis de inducción tomamos $x_1 \neq x$ un vértice que no desconecta a $\tilde{G_1}$. Tenemos entonces que x_1 no desconecta a G y es diferente a x_0. □

Vamos ahora a la primera prueba del Teorema 6.2.8.

Demostración. ($\Rightarrow$) Asumimos que existe un circuito Euleriano y sea x un vértice de G. Notamos por E_x al conjunto de aristas que inciden en x. Podemos suponer aquí que G no tiene lazos, puesto que si los tuviera esto no alteraría la existencia de un recorrido Euleriano ni la paridad de las aristas.

Escribimos el circuito Euleriano empezando de x:

$$(x = x_0, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n = x).$$

Si en el circuito se tiene $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_k} = x$ (claramente $i_1 = 0$ e $i_k = n$), entonces

$$E_x = \{e_{i_1}, e_{i_2-1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{k-1}-1}, e_{i_{k-1}}\}.$$

Concluimos que $gr(x) = \#E_x$ es par.

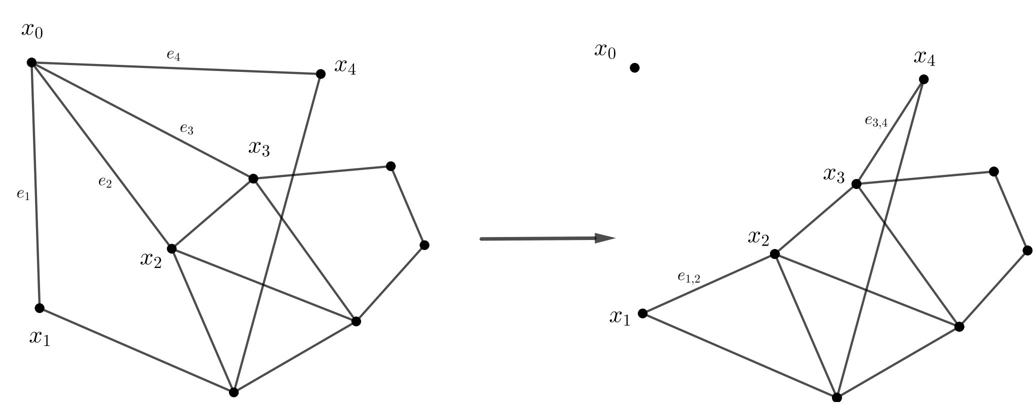
($\Leftarrow$) Probemos esto por inducción en $n = \#V$. Es claro que se cumple para $n = 1$ porque en un multigrafo con un solo vértice las aristas deben ser lazos. Luego tenemos que existe un circuito Euleriano.

Supongamos ahora que para cierto n todo multigrafo conexo con m vértices de grado par (para $m < n$) admite un circuito Euleriano y tomemos $G = (V, E)$ con n vértices de grado par. Fijamos un vértice $x_0 \in V$ que no desconecta G (aquí usamos el Lema 6.2.9). Por la observación hecha anteriormente podemos suponer que no hay lazos en x_0. A partir de G vamos a construir un grafo de vértices $V \setminus \{x_0\}$. Lo hacemos en dos pasos:

Primer paso: Si entre x_0 y sus adyacentes no hay aristas múltiples notamos por $x_1, \dots, x_k$ a sus adyacentes y por $e_1, \dots, e_k$ a las aristas que los unen a x_0 (respectivamente). Observemos que $k = gr(x_0)$ y por lo tanto es par. Consideramos entonces el grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V \setminus \{x_0\}$ y

$$E' = (E \cup \{e_{1,2}, e_{3,4}, \dots, e_{k-1,k}\}) \setminus \{e_1, \dots, e_k\},$$

donde $e_{i,i+1}$ son nuevas aristas que unen los vértices x_i y x_{i+1}.

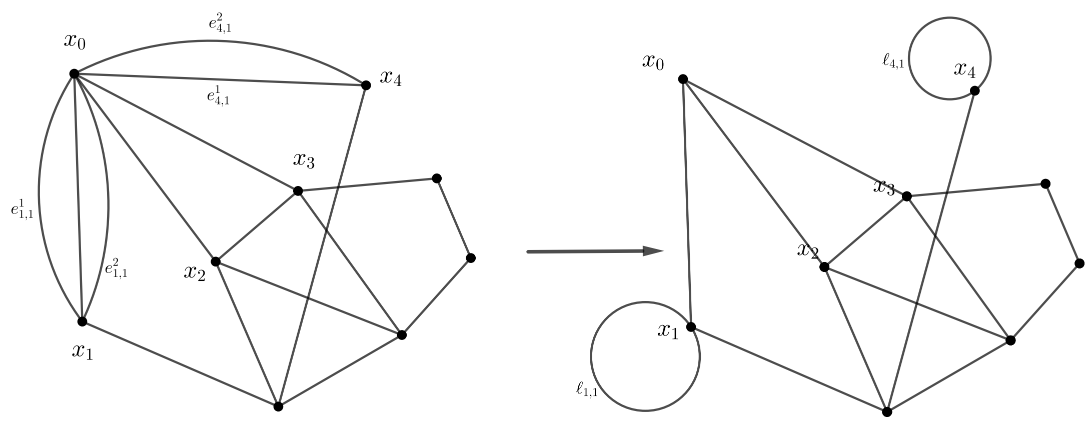


Observar que el grado de los vértices de G' es igual que en G y G' es conexo, entonces por hipótesis de inducción admite un circuito Euleriano

$$(\tilde{x}_0, \tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_m, \tilde{x}_m).$$

Si en este circuito cambiamos las secuencias $x_i, e_{i,i+1}, x_{i+1}$ por la secuencia $x_i, e_i, x_0, e_{i+1}, x_{i+1}$ y la secuencias $x_{i+1}, e_{i,i+1}, x_i$ por la secuencia $x_{i+1}, e_{i+1}, x_0, e_i, x_i$, con lo que obtenemos un circuito Euleriano en G.

Segundo paso: En el caso general suponemos que entre x_0 y x_i hay m_i aristas. Dividimos m_i entre dos y tenemos $m_i = 2q_i + r_i$ con $r_i \in \{0, 1\}$. Definimos entonces el grafo $G'' = (V, E'')$ a partir de G, en el que se agregan q_i lazos a x_i y se borran $2q_i$ de las aristas que unen x_i con x_0. Notamos $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,q_i}$ a los nuevos lazos agregados al vértice x_i. Cada lazo $\ell_{i,j}$ sustituye a dos aristas $e^1_{i,j}$ y $e^2_{i,j}$ que unen x_i con x_0. Observar que esto no altera la paridad del grado de los vértices.



Si G'' queda conexo (que en este caso es lo mismo que decir que x_0 no queda aislado), entonces cumple con lo supuesto en el primer paso y por lo tanto admite un circuito Euleriano c. Luego cambiando en c cada lazo ℓ_{ij} por la secuencia $e^1_{i,j}, x_0, e^2_{i,j}$ obtenemos un circuito Euleriano en G.

Si G'' queda disconexo se toma un circuito Euleriano c en el multigrafo que resulta de quitar a G'' el vértice x_0, y luego se construye un circuito Euleriano en G llevando a cabo el mismo proceso de sustitución de lazos que antes.

$\square$

Demostración alternativa del Teorema 6.2.8. [2]

Dejaremos tal como está la prueba de ($\Leftarrow$) en la primera demostración y probaremos sólo la otra implicación. Lo haremos por inducción en la cantidad de aristas, que denotaremos por n. Se deja al lector observar que los primeros casos son sencillos ($n = 1, 2, 3$).

Supongamos que tenemos un multigrafo conexo G con n aristas tal que todos sus vértices tienen grado par, y que todo multigrafo conexo con $m < n$ aristas que cumpla esta misma condición admite un circuito Euleriano. Fijemos cualquier vértice x_0 de G. Si G tiene un lazo en x_0 entonces el multigrafo que resulta de quitarle a G dicho lazo admite un circuito Euleriano por hipótesis de inducción. Esto implica que también G admite un circuito Euleriano. Suponemos entonces a partir de ahora que no hay lazos en x_0.

Afirmación: Existe un circuito C que empieza y termina en x_0.

Para esto tomamos un recorrido en G que comience en x_0 y tenga longitud máxima. Lo escribimos

$$C = (x_0, e_1, \ldots, e_m, x_m), \tag{6.2}$$

donde las aristas $e_1, \ldots, e_m$ son todas diferentes pero los vértices $x_0, \ldots, x_m$ pueden repetirse.

Si $x_0 \neq x_m$, entonces suponemos que $x_{i_1} = \ldots = x_{i_k} = x_m$ con índices todos diferentes y escritos en forma creciente (e $i_1 \neq 0$). Luego las aristas pertenecientes al recorrido que inciden en x_m son

$$e_{i_1}, e_{i_1+1}, e_{i_2}, e_{i_2+1}, \ldots, e_{i_k}, e_{i_k+1}, e_m.$$

En la anterior lista de aristas puede haber repeticiones pero solo de la forma $e_{i_\ell+1} = e_{i_{\ell+1}}$, en este caso dicha arista debe ser un lazo en x_m. Teniendo esto en cuenta tenemos que el grado de x_m en C (mirado ahora como multigrafo) es impar. Como el grado de x_m en G es par debe haber otra arista e diferente a las anteriores que conecta x_m con un vértice y (no necesariamente diferente a los anteriores). Luego el recorrido

$$(x_0, e_1, \ldots, e_m, x_m, e, y)$$

es estrictamente más largo que C, lo que es absurdo. Concluimos entonces que $x_0 = x_m$, por lo tanto C es un circuito. Esto termina la prueba de la afirmación.

Tomemos ahora G' el multigrafo que resulta de quitarle a G todas las aristas de C y los vértices que quedan aislados al quitar dichas aristas. El circuito C es un circuito Euleriano sobre si mismo, por lo que el grado de cada uno de sus vértices para C debe ser par. Como para cada vértices x en G' se tiene

$$gr_G(x) = gr_{G'}(x) + gr_C(x),$$

[2]Esta prueba es la dada en [G]. Fue añadida en estas notas a último momento por ser más simple que la propuesta originalmente.

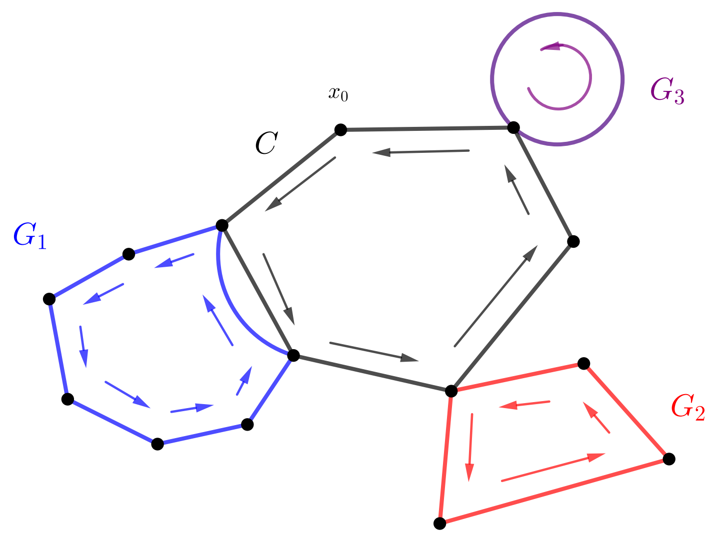
tenemos que G' tiene todos sus vértices de grado par.

Como G' puede ser disconexo consideramos sus componentes conexas $G_1, \dots, G_r$. Estas componentes tienen necesariamente menos aristas que G, además el grado de sus vértices debe ser par, luego en cada una de ellas hay un circuito Euleriano.

Consideramos el circuito C como en (6.2) y suponemos que tenemos índices $j_1, \dots, j_r$ tal que x_{j_i} es el primer vértice de G_i que aparece en el circuito C. Tomamos $\mathbf{c_i}$ un circuito Euleriano en G_i que comienza y termina en x_{j_i}. Luego construimos en G el circuito

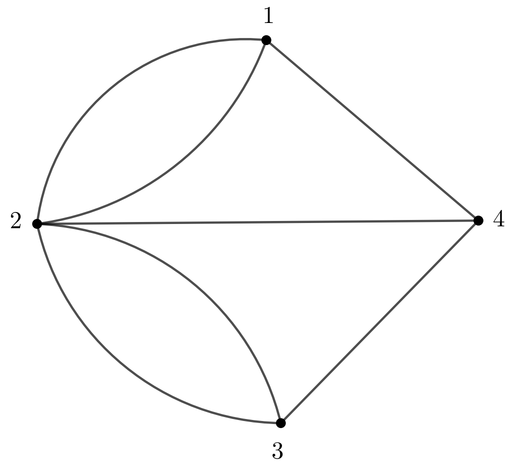
$$(x_0, e_1, \dots, e_{j_1-1}, \mathbf{c_1}, e_{j_1}, \dots, e_{j_r-1}, \mathbf{c_r}, e_{j_r}, \dots, x_m = x_0).$$

Este es necesariamente Euleriano pues pasa por todas las aristas de C y de los subgrafos $G_1, \dots, G_r$.



□

Utilizando el Teorema 6.2.8 podemos rápidamente concluir la solución del problema de los puentes de Königsberg.



Vemos que $gr(1) = gr(3) = gr(4) = 3$ y $gr(2) = 5$, por lo que no puede haber un circuito Euleriano. Como se ve en el siguiente corolario tampoco puede haber un recorrido Euleriano abierto.

Corolario 6.2.10. *Un multigrafo conexo G admite un recorrido Euleriano abierto si y sólo si dos de sus vértices tienen grado impar y el resto tienen grado par.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que existe un recorrido Euleriano $(x_0, e_0, \ldots, e_{n-1}, x_n)$. Luego si agregamos al grafo G una arista que une x_0 con x_n tenemos que existe un circuito Euleriano. Por el Teorema 6.2.8 se tiene que el grado de todas las aristas de este nuevo grafo es par. Por lo tanto el grado de todas los vértices del grafo original G es par, salvo para x_0 y x_n, que tienen grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que x e y son los vértices que tienen grado impar. Se considera G' el grafo que resulta de agregarle una arista a G uniendo x on y. Luego los vértices de G' tienen todos grado par, por lo que existe un circuito Euleriano en G'. Es claro entonces que existe un recorrido Euleriano en G que une x con y. □

Para el caso de un multigrafo dirigido $G = (V, E)$ podemos hacer la siguientes definiciones:

- El *grado entrante* de x como la cantidad de aristas entrantes en x (de la forma $(y, x, n) \in V \times V \times \mathbb{N}$).
- El *grado salientes* de x como la cantidad de aristas salientes en x (de la forma $(x, y, n) \in V \times V \times \mathbb{N}$).

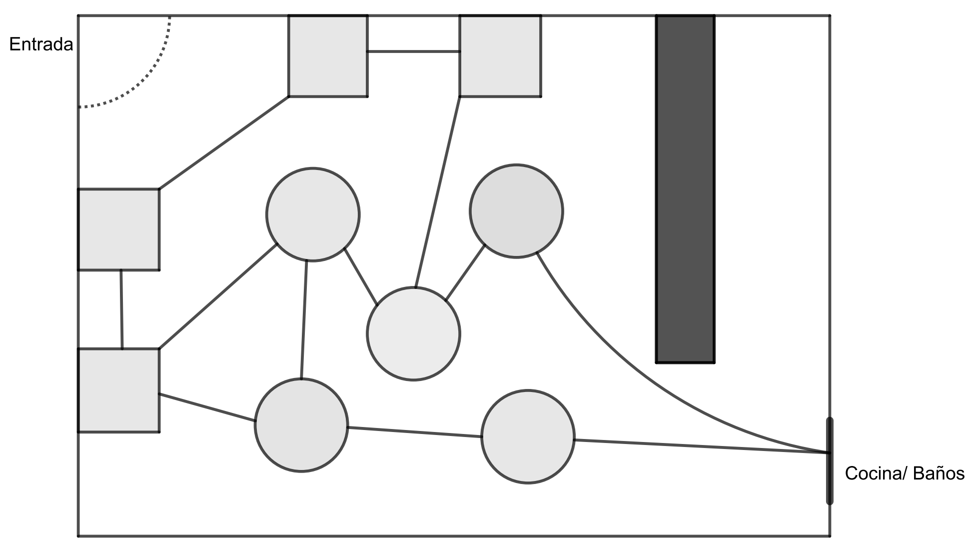
Tenemos entonces la versión del Teorema 6.2.8 para multigrafos dirigidos.

Teorema 6.2.11. *Sea $G = (V, E)$ un multigrafo dirigido. Entonces G admite un circuito Euleriano si y solo si el grado entrante de cada vértice es igual a su grado saliente.*

Observar que la prueba del Teorema 6.2.8 puede adaptarse al caso dirigido. A partir del Teorema 6.2.11 se puede obtener la versión para multigrafos dirigidos del Corlolario 6.2.10.

6.2.2. Caminos y ciclos Hamiltonianos

Ejemplo 6.2.12. Influido por lo que le contaba el Comadreja (que para ese tiempo hasta dormía en el bar), el Turco se había obsesionado con los grafos. Tanto era así que una mañana se puso a dibujar líneas sobre el piso uniendo pares de mesas. Ese día le pidió al único mozo del bar que siempre que se moviera entre las mesas lo hiciera respetando las aristas que había marcado. Después de negociar una subida de sueldo a cambio del nuevo capricho, el mozo aceptó. Se muestra a continuación el plano del bar incluyendo los caminos que dibujó el Turco entre las mesas.



Un día, ya tomado por completo por el delirio, el Turco le pidió al mozo que cambiara todos los manteles de las mesas con la condición de no pasar dos veces por la misma mesa. Le dijo además que si en un momento se quedaba sin posibilidades de continuar tendría que volver a la cocina y empezar el camino de nuevo. Totalmente fastidiado, el mozo reboleó los manteles por el aire y se fue pateando mesas para nunca volver.

Al otro día el Turco contrató al Comadreja para cubrir el puesto, confiado en que él sí entendería sus excentricidades.

La sociedad de ambos personajes abrió la puerta a una etapa dorada del bar. Por desgracia esta duró poco. Pronto los clientes dejaron de ir. Quizá tenga que ver el hecho de que se les haya ocurrido conectar, con una línea dibujada en el suelo, la puerta de entrada con una de las mesas y exigirle a los clientes que también ellos respetaran las aristas al moverse.

Del ejemplo anterior podemos extraer el siguiente problema: Dado un grafo G, ¿existe un camino simple que pasa por todos los vértices? Un tal camino se denomina **camino Hamiltoniano**. Por otro lado, un **ciclo Hamiltoniano** es un ciclo que pasa por todos los vértices.

Consideramos en esta sección grafos y no multigrafos en general por una sencilla razón: un camino o ciclo Hamiltoniano solo puede pasar por una arista que une dos vértices dados, luego un multigrafo admite un camino o ciclo Hamiltoniano si y sólo si lo admite el grafo que resulta de sacarle al multigrafo original las aristas que repiten pares de vértices adyacentes.

Determinar cuáles son exactamente los grafos que admiten caminos o ciclos Hamiltonianos es más difícil que para recorridos y circuitos Eulerianos. Daremos sin embargo algunos condiciones suficientes. Una idea general que engloba a estas condiciones es la siguiente: cuanto más aristas haya en el grafo más probable será que admita un camino o ciclo Hamiltoniano. Existe una condición necesaria en este sentido pues un camino Hamiltoniano en un grafo de n vértices debe pasar por $n-1$ aristas diferentes, por lo que el número de aristas totales no puede ser menor en ese caso. Esta es también una condición necesaria para que el grafo sea conexo.

Teorema 6.2.13. *Sea G un grafo sin lazos con n vértices.*

1. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n-1$, entonces G admite un camino Hamiltoniano.*

2. *Si para todo par de vértices x e y se tiene $gr(x) + gr(y) \geq n$, entonces G admite un ciclo Hamiltoniano.*

Demostración. Empecemos probando la primera parte. Para eso veamos primero que G es conexo. Si no lo fuera tomamos dos componentes conexas G_1 y G_2 y dos vértices x e y, uno en cada una de estas componentes conexas. Si G_1 tiene n_1 vértices y G_2 tiene n_2 vértices, tenemos

$$gr(x) + g(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2,$$

lo que contradice la hipótesis.

Supongamos ahora que no existe un camino Hamiltoniano en G y tomemos un camino simple abierto de longitud máxima. Lo notamos

$$c = (x_1, \ldots, x_m).$$

Como estamos suponiendo que no hay caminos Hamiltonianos debe darse $m < n$.

Afirmación: Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de c.

Si x_1 o x_m es adyacente a algún vértice x fuera del camino c, entonces este puede prolongarse por alguno de los extremos, lo que contradice el hecho de que c tiene longitud máxima. Por ortro lado si x_1 y x_m son adyacentes no hay nada más que probar.

En el otro caso todos los vértices adyacentes a los vértices x_1 y x_m están en el conjunto $\{x_2, \ldots, x_{m-1}\}$. Vamos a definir los siguientes conjuntos de índices:

$$S_1 = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_1 \text{ es adyacente a } x_k\}$$

$$S_m = \{k \in \{3, \ldots, m-1\} : x_m \text{ es adyacente a } x_{k-1}\}.$$

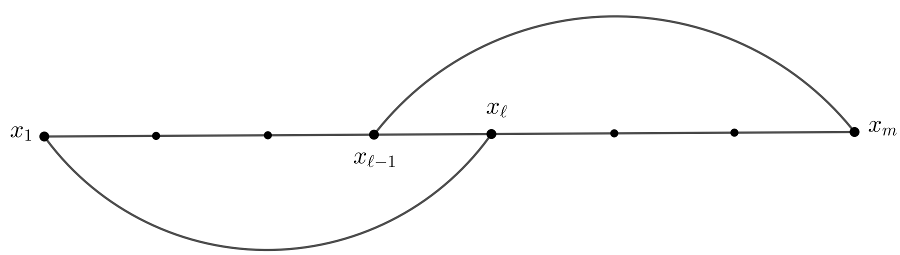
Como $gr(x_1) + gr(x_m) \geq n - 1$, entonces

$$\#S_1 + \#S_m \geq n - 3 > m - 3 = \#\{3, \ldots, m-1\},$$

lo que implica que $S_1 \cap S_m \neq \emptyset$. Tomamos $\ell \in S_1 \cap S_m$, luego x_ℓ es adyacente a x_1 y $x_{\ell-1}$ es adyacente a x_m. Obtenermos así el ciclo

$$(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_m, \ldots, x_\ell, x_1).$$

Esto prueba la afirmación.



Ahora reescribimos el ciclo de largo m obtenido en la afirmación de la forma $(y_1, \ldots, y_m, y_1)$. Como $m < n$ y G es conexo, existe un vértice del ciclo y_k que es adyacente a un vértice x fuera del ciclo. Entonces existe un camino simple

$$(x, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

que es más largo que el camino c tomado al principio. Esto es absurdo porque este último tiene largo máximo. Concluimos entonces que $m = n$ y por lo tanto c es un camino Hamiltoniano.

Para probar la segunda parte observemos que por la parte anterior el grafo G admite un camino Hamiltoniano. Repitiendo el argumento utilizado para probar la afirmación puede construirse un ciclo que pase por los mismos vértices que este camino Hamiltoniano. Este es claramente un ciclo Hamiltoniano. $\square$

Ejercicio 6.2.14. Probar que si $G = (V, E)$ es un grafo sin lazos con $\#V \geq 3$ y $\#E \geq C_2^{n-1} + 2$, entones G admite un ciclo Hamiltoniano.

También podemos considerar caminos y ciclos Hamiltonianos en grafos dirigidos. En este caso presentamos la solución al problema de la existencia para una familia particular de estos.

Un grafo dirigido $G = (V, E)$ es de tipo **torneo** si dados dos vértices $x, y \in V$, entonces una (y sólo una) de las aristas (x, y) y (y, x) está en E. El nombre de esta familia de grafos viene de que a partir de él se modela el resultado de un torneo del tipo *todos contra todos*. Observar que quitando la dirección a las aristas de un grafo de tipo torneo se obtiene el grafo completo. Sobre estos grafos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.2.15. *Todo grafo dirigido de tipo torneo admite un camino Hamiltoniano.*

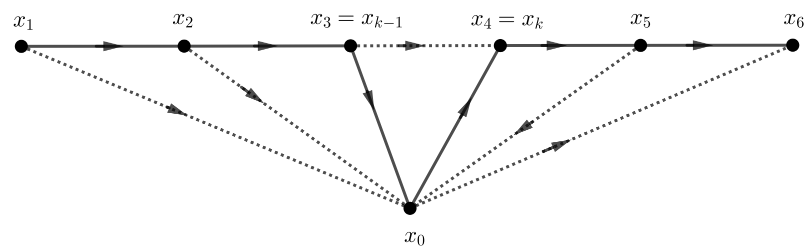
Demostración. Suponemos que $G = (V, E)$ tiene n vértices y tomamos un camino simple de longitud máxima $(x_1, \ldots, x_m)$. Si este camino pasa por todos los vértices $(n = m)$ entonces es un camino Hamiltoniano. Si no es así supongamos que el camino no pasa por el vértice x_0.

Sabemos que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ una de las aristas (x_0, x_i) y (x_i, x_0) está en E. Distinguimos tres casos

- Si la arista (x_0, x_1) está en E, entonces el camino simple $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ es más largo que el camino original, lo que es absurdo.
- Si la arista (x_m, x_0) está en E entonces el camino simple $(x_1, \ldots, x_m, x_0)$ es más largo que el original, lo que también es absurdo.
- En el caso restante se tiene que $(x_1, x_0), (x_0, x_m) \in E$, luego consideramos

  $$k = \text{mín}\{i : (x_0, x_i) \in E\}.$$

  Construimos entonces el camino simple $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_k, \ldots, x_m)$ que es más largo que el camino original.

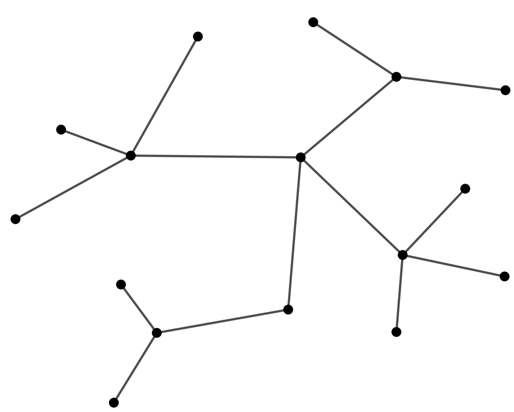


Al llegar a un absurdo en los tres casos podemos concluir que la suposición es falsa, es decir que un camino simple de largo máximo es necesariamente Hamiltoniano. $\square$

Ejercicio 6.2.16. ¿Es cierto que todo grafo dirigido de tipo torneo admite un ciclo Hamiltoniano?

6.3. Árboles

Decimos que un grafo no dirigido G es un **árbol** si es conexo y no tiene ciclos.



Tomemos un grafo $G = (V, E)$. Un **árbol recubridor** de G es un subgrafo T que además es un árbol y cumple $V(T) = V$.

Teorema 6.3.1. *Todo grafo conexo tiene un árbol recubridor.*

En la prueba del teorema usaremos el siguiente lema:

Lema 6.3.2. *Todo conjunto ordenado finito $(X, \leq)$ no vacío tiene un elemento maximal.*

La prueba del lema se deja como ejercicio. Se sugiere hacerla por inducción en el cardinal de X.

Demostración del Teorema 6.3.1. Consideramos $\mathcal{T}$ el conjunto de árboles que son subgrafos de G, lo ordenamos por:

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1 \textit{ es subgrafo de } T_2.$$

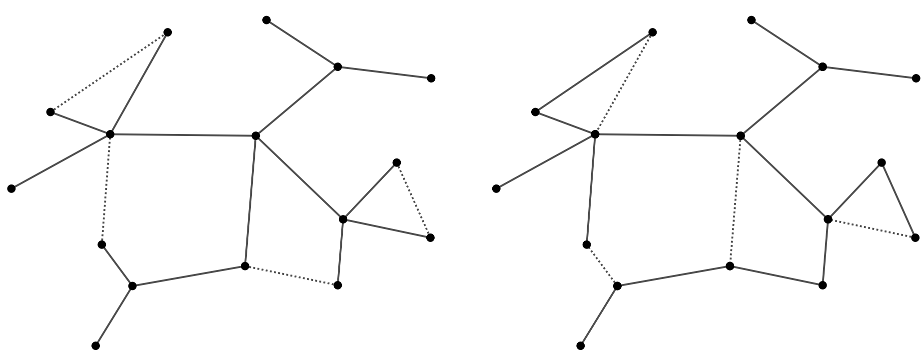
Por el Lema 6.3.2 existe un árbol T_M que es maximal en $\mathcal{T}$. Vamos a probar que T_M es un árbol recubridor de G.

<u>Afirmación:</u> Si existe un vértice $v_0 \in V(G) \setminus V(T_M)$, entonces existen vértices $v_1 \in V(T_M)$ y $v_2 \in V(G) \setminus V(T_M)$ que son adyacentes en G.

Tomamos $v \in V(T_M)$ y un camino $(v = x_0, \ldots, x_n = v_0)$. Sea $k = \min\{i : x_i \notin V(T_M)\}$. Luego podemos considerar $v_1 = x_{k-1}$ y $v_2 = x_k$. Esto prueba la afirmación.

Por la afirmación, si T_M no es recubridor, entonces existen dos vértices de G, $v_1 \in V(T_M)$ y $v_2 \in V(G) \setminus V(T_M)$ que son adyacentes mediante una arista e. Si agregamos a T_M el vértice v_2 y la arista e, seguimos teniendo un árbol, lo que contradice la maximalidad de T_M. Por lo tanto T_M debe ser recubridor de G. □

En la siguiente figura pueden verse dos diferentes árboles recubridores de un mismo grafo.



6.4. Grafos planos

El segundo problema dado al principio del capítulo (conexión de servicios básicos) puede interpretarse de la siguiente manera: ¿Es posible dibujar en el plano el grafo bipartito $K_{3,3}$ de forma tal de no intersectar sus aristas?

Podemos preguntarnos más en general qué grafos es posible dibujar en el plano sin intersectar aristas. Vamos a dar una definición más precisa de esto.

Una **curva plana** es una función continua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que se escribe $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ donde las funciones $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ son continuas. Diremos en este caso que α **une** $x = \alpha(0)$ con $y = \alpha(1)$.

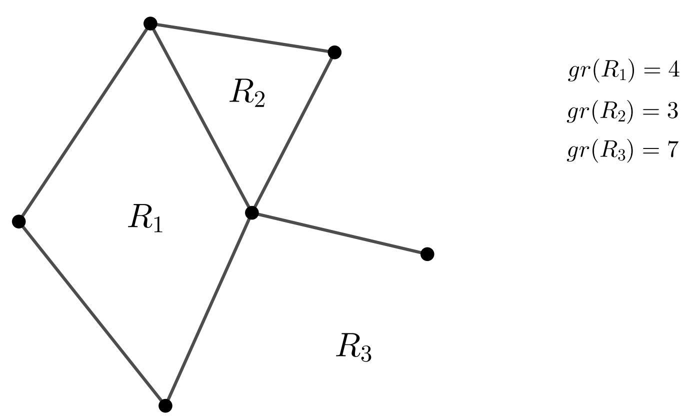
Para un par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\mathcal{C}(x, y)$ al conjunto de curvas planas que unen x con y. El conjunto de todas las curvas planas será notado $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. Una **representación plana** de un grafo (o multigrafo) $G = (V, E)$ es un par de funciones inyectivas $F : V \to \mathbb{R}^2$ y $H : E \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ tal que:

- $H(\{x, y\}) \in \mathcal{C}(F(x), F(y))$
- Si e_1 y e_2 son dos aristas distintas en E y $\alpha_1 = H(e_1)$ y $\alpha_2 = H(e_2)$, entonces $\alpha_1((0,1)) \cap \alpha_2((0,1)) = \emptyset$. Es decir que las imágenes de α_1 y α_2 pueden intersectarse solamente en los extremos.

Decimos entonces que el grafo G es **plano** (o **planar**) si admite una representación plana.

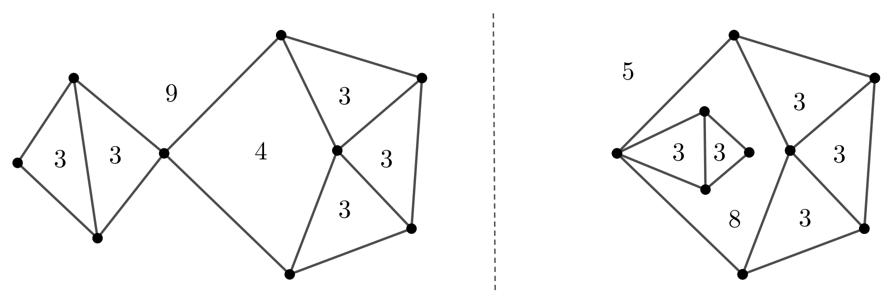
Cuando tengamos un grafo plano $G = (V, E)$ con una representación plana fijada (F, H), le llamaremos "vértice" tanto a los elementos de V como a los elementos de $F(V)$, y "arista" tanto a los elementos de E como a las imágenes de las curvas de $H(E)$.

Fijado un grafo plano junto con su representación plana observamos que los puntos del plano que no son vértices y no pertenecen a ninguna arista se distribuyen en lo que llamamos **regiones**. Podemos definir el **grado** de una región como la cantidad de aristas que la delimitan.

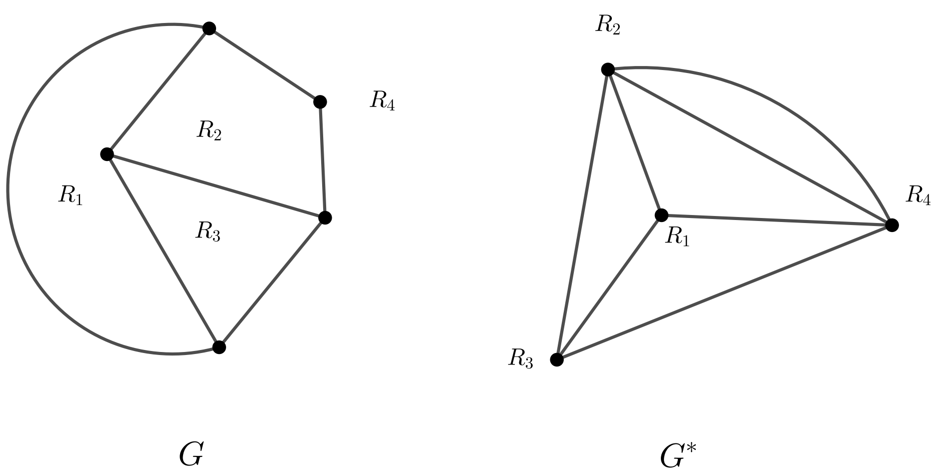


Hay dos cosas a tener en cuenta en la definición del grado de una región:

1. Si una región está delimitada por un vértice de grado 1 que no es aislado, entonces la arista que incide en ese vértice cuenta como dos lados de la región. Esto es lo que sucede con la región no acotada R_3 de la figura anterior.
2. La definición de grado de una región no es intrínseca del grafo si no que depende de la representación plana. Podemos ver esto con el siguiente ejemplo, en el que tenemos dos representaciones planas del mismo grafo. El grado de cada región es indicado en su interior.



Dado un grafo o multigrafo G junto con una representación plana dada, puede definirse su **dual** G^* como el multigrafo cuyos vértices son las regiones de G y existen tantas aristas que unen dos regiones R_1 y R_2 como aristas de G estén simultaneamente en el borde de ambas regiones.



Observar que si una región de G tiene grado k, entonces esta tiene grado k como vértice del dual G^*. Esto muestra que el dual depende de la representación plana fijada.

6.4.1. Característica de Euler

Dado un grafo (o multigrafo) plano G notamos por $v(G)$ a la cantidad de vértices de G, por $a(G)$ a la cantidad de aristas de G y por $r(G)$ a la cantidad de regiones de G. (Esta última depende a priori de la representación plana.)

El siguiente teorema de Euler relaciona las cantidades anteriores para grafos planos.

Teorema 6.4.1. *Sea G un grafo plano conexo sin lazos. Fijamos una representación en el plano de G. Entonces*

$$v(G) - a(G) + r(G) = 2. \tag{6.3}$$

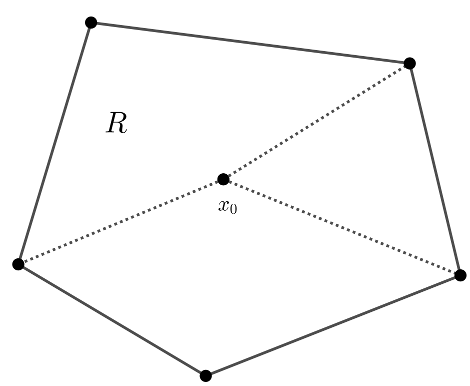
Demostración. Lo haremos por inducción en el número de vértices n.

Para $n = 1$ y $n = 2$ es claro. Supongamos ahora que la formula es cierta para todo grafo de n vértices y tomemos un grafo $G = (V, E)$ con $v = v(G) = n + 1$. Notamos también $a = a(G)$ y $r = r(G)$.

Tomemos $x_0 \in V$ un vértice que no desconecta el grafo (ver Lema 6.2.9) y notemos G' al subgrafo de G generado por $V \setminus \{x_0\}$. En este caso tenemos por hipótesis de inducción

$$2 = v(G') - e(G') + r(G') = (v - 1) - (a - gr(x_0)) + r(G'), \tag{6.4}$$

El vértice x_0 pertenece a una región R del grafo G'.



Supongamos que $gr(x_0) = k$.

- Si $k = 1$ entonces al agregar la única arista que incide en x_0 la región R no se divide, luego $r(G') = r$.
- Si $k > 1$, cada arista que incide en x_0 es borde de dos regiones diferentes de G y a la vez cada región de G tiene en su borde dos aristas diferentes que inciden en x_0, esto implica que R se divide en k regiones. Es decir que $r = r' + k - 1$. (Esto no cambia si R es la región no acotada).

Observar que en ambos casos la ecuación (6.4) implica que $v - a + r = 2$, luego por el principio de inducción queda demostrado el teorema. □

Observación 6.4.2.
1. El teorema anterior muestra que la cantidad de regiones no depende de la representación plana si no sólo del grafo G.
2. Un grafo plano puede verse como un grafo en la esfera. Se observa fácilmente que un grafo es plano si y sólo si admite una representación en la esfera (por lo que podemos llamarlos también **grafos esféricos**).
3. El número $v-a+r$ se denomina **característica de Euler**. Tenemos entonces que tanto la característica de Euler del plano como la de la esfera es 2. Sin embargo hay superficies con característica de Euler diferente.
4. Si permitimos lazos la fórmula (6.3) sigue siendo cierta. También es cierta para multigrafos (se deja como ejercicio).

Corolario 6.4.3. *Sea G un grafo plano sin lazos con $a = a(G) > 2$ (notamos también $v = v(G)$ y $r = r(G)$). Luego*

(1) $3r \leq 2a$

(2) $a \leq 3v - 6$

Demostración. El grado de cada región es al menos tres (porque G no es un multigrafo y no tiene lazos). Observamos que cada arista es borde o bien de dos regiones o bien es dos veces borde de una región, luego

$$2a = \sum_{R \text{ región}} gr(R) \geq 3r.$$

Esto prueba (1). Por el Teorema 6.4.1

$$2 = v - a + r \leq v - a + \frac{2}{3}a = v - \frac{1}{3}a,$$

lo que implica (2). □

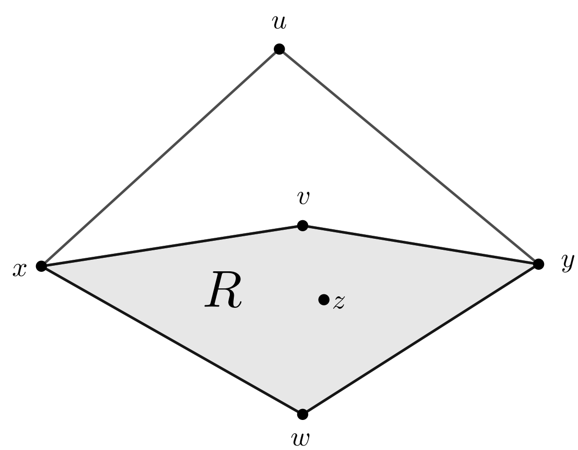
6.4.2. Grafos no planos

En este punto volvemos al segundo de los problemas presentados al principio del capítulo. La siguiente proposición responde a la pregunta planteada.

Proposición 6.4.4. *Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.*

Demostración. Veamos que $K_{3,3}$ no es plano. El caso de K_5 puede probarse usando un argumento similar.

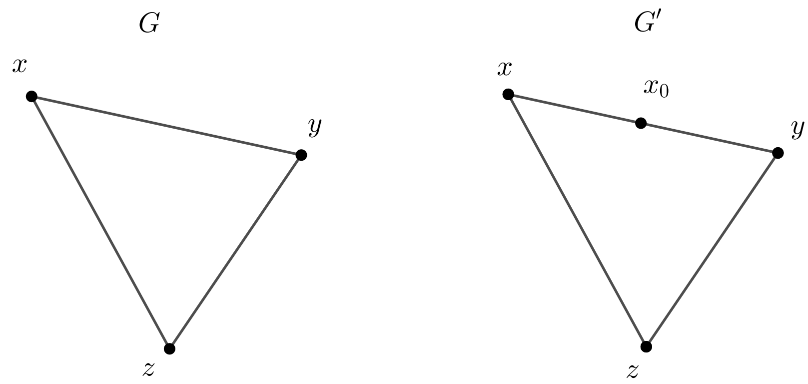
Supongamos que $K_{3,3}$ es plano y sean $\{u, v, w, x, y, z\}$ sus vértices tal que los vértices u, v y w son adyacentes a los vértices x, y y z. El subgrafo generado por los vértices u, v, w, x e y es $K_{3,2}$. Usando la característica de Euler podemos deducir que este subgrafo plano tiene 3 regiones. Como un grafo bipartito no tiene ciclos de grado impar (Ejercicio 6.2.2) concluimos que las tres regiones del subgrafo tienen grado cuatro.



Llamemos R a la región (de $K_{3,2}$) que contiene al sexto vértice z. En el borde de dichas región sólo pueden aparecer dos de los tres vértices u, v y w, por lo que uno de ellos no puede conectarse con z. Esto muestra que no existe una representación plana de $K_{3,3}$. $\square$

En realidad la proposición anterior es parte de un resultado más general que enunciaremos sin demostrar. Para esto necesitamos hacer primero algunas definiciones.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es una **subdivisión elemental** de G si $V' = V \cup \{x_0\}$ y existe un par de vértices $x, y \in V$ tal que $E' = (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, x_0\}, \{x_0, y\}\}$. Dicho de otro modo, G' se obtiene al dividir en dos una arista de G poniendo en esta un nevo vértice. De forma similar puede hacerse la definición para multigrafos.



Un grafo G' es una **subdivisión** de otro grafo G si existe una secuencia finita de grafos

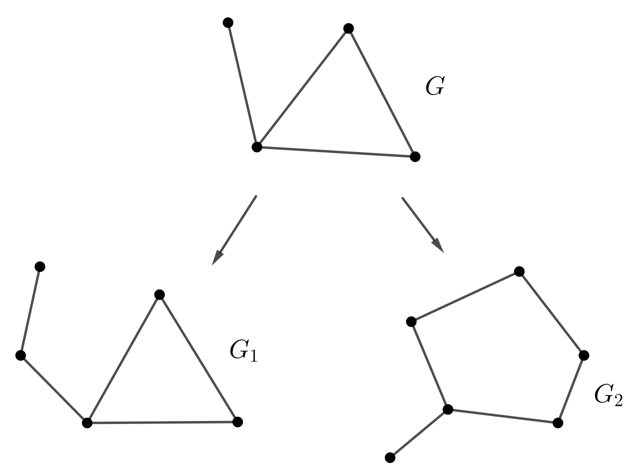
$$G_0 = G, G_1, \ldots, G_{k-1}, G_k = G'$$

tal que G_i es una subdivisión elemental de G_{i-1} para todo $i = 1, \ldots, k$.

Ejercicio 6.4.5. Consideramos una familia de grafos $\mathcal{G}$. Probar que la subdivisión define en $\mathcal{G}$ una relación de orden y describir los posibles elementos minimales.

Diremos que G_1 y G_2 son grafos (o multigrafos) **homeomorfos** si existen tres grafos G, G_1' y G_2' tales que

- G_1' y G_2' son subdivisiones de G,
- G_1 es isomorfo a G_1' y G_2 es isomorfo a G_2'.



Observación 6.4.6.
- La relación de homeomorfismo define una relación de equivalencia en cualquier familia de grafos o multigrafos $\mathcal{G}$.
- La condición de planaridad se preserva por homeomorfismo, es decir que si G_1 y G_2 son homeomorfos, entonces G_1 es plano si y sólo si G_2 lo es.
- Todo multigrafo es homeomorfo a un grafo. Más precisamente todo multigrafo tiene una subdivisión que es un grafo. Luego el problema de la planaridad de multigrafos se reduce al caso de los grafos.

Habiendo definido estas nociones estamos listos para enunciar el siguiente teorema:

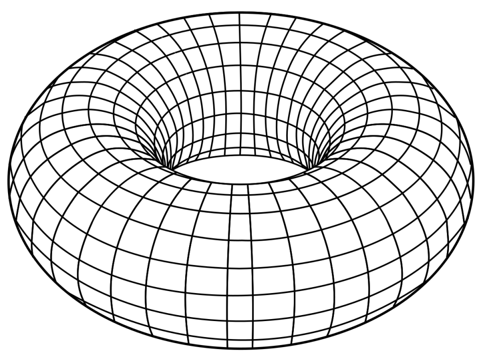
Teorema 6.4.7 (Kuratowski)**.** *Un grafo G es plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.*

La prueba del teorema anterior puede encontrarse en [L] o [W].

Ejercicio 6.4.8. El toro es la superficie de revolución que se obtiene al rotar el círculo

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

alrededor del eje z.

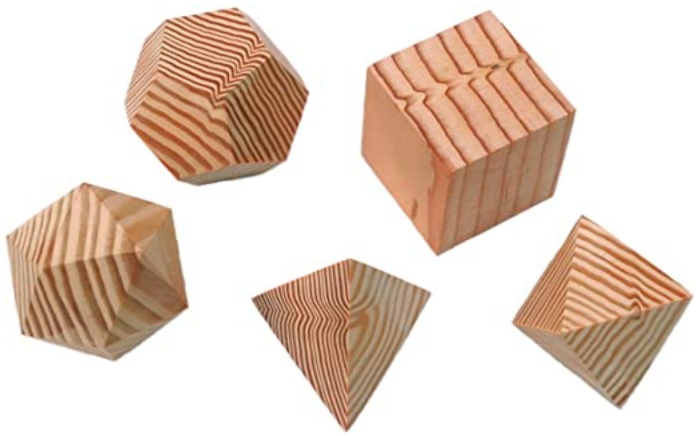


Decimos que un grafo es **tórico** si admite una representación en el toro.

1. Mostrar que $K_{3,3}$ y K_5 son grafos tóricos.
2. Cálcular la característica de Euler en el toro.
3. Investigar:
   a) Si existen grafos que no sean tóricos.
   b) Si dado un grafo cualquiera G, existe una superficie S tal que G admite una representación en S.

6.4.3. Solidos platónicos

Para su cumpleaños número cincuenta y dos el Turco recibió una caja de madera con cinco solidos:



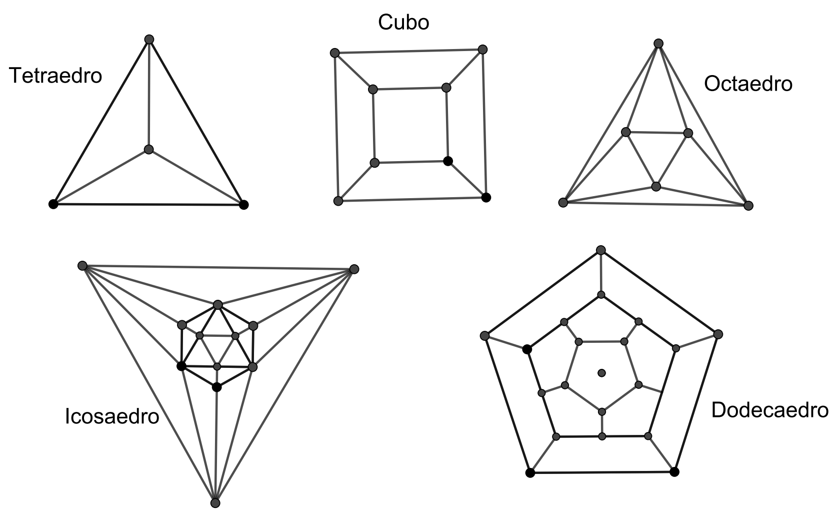
Nunca supo de quién era el regalo, había encontrado la caja sobre la barra al llegar al bar con una tarjeta que decía "Solidos platónicos. Feliz cumpleaños".

Entrenado como estaba en el asunto de los grafos reconoció rápidamente que lo que tenía delante eran cinco grafos esféricos que cumplían dos condiciones:

(i) Todos los vértices tenían el mismo grado. Siendo este mayor o igual a 3.

(ii) Todas las regiones tenían el mismo grado. También mayor o igual a 3.

Supuso (de forma acertada) que estas serían las condiciones que definen a los solidos platónicos. Se preguntó si habría más que cinco solidos como estos. Rápidamente tomó papel y lápiz y se puso a hacer algunas cuentas. También dibujó dichos grafos en el plano:



Más tarde llegó el Comadreja al bar, y al verlo con dificultades para resolver su problema le contó el siguiente teorema:

Teorema 6.4.9. *Existen sólo cinco solidos platónicos.*

Demostración. Supongamos que G es un grafo plano que representa a un sólido platónico. Notamos entonces por m al grado de los vértices y por n al grado de las regiones. Ponemos también $v = v(G)$ y $a = a(G)$ y $r = (G)$. Tenemos

$$2a = \sum_{x \in V} gr(x) = mv \text{ y } 2a = \sum_{R \text{ región}} gr(R) = nr. \tag{6.5}$$

Usando la fórmula característica de Euler se tiene

$$0 < 2 = v - a + r = \frac{2a}{n} - e + \frac{2a}{m} = a\left(\frac{2m - mn + 2n}{mn}\right). \tag{6.6}$$

Lo que implica $2m - mn + 2n > 0$, que es equivalente a

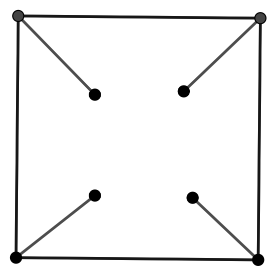
$$(m-2)(n-2) = mn - 2m - 2n + 4 < 4.$$

Si sumamos a esto la condición $m, n \geq 3$ tenemos las siguientes soluciones:

- $\underline{m = n = 3}$: Sustituyendo en la ecuación (6.6) tenemos $2 = \frac{a}{3}$ y por lo tanto $a = 6$. Por último las ecuaciones (6.5) nos dan $v = 4$ y $r = 4$. Esto determina que el grafo es completo de cuatro vértices, es decir que el solido es el tetraedro.
- $\underline{m = 3 \text{ y } n = 4}$: Usando nuevamente las ecuaciones (6.5) y (6.6) obtenemos $a = 12$, $v = 8$ y $r = 6$. Para ver que en este caso G es el cubo hagamos algunas observaciones:

(1) El borde de la región no acotada de G es un cuadrilátero. El resto de las aristas y vértices de G están en el interior de dicho cuadrilátero.

(2) Como el grado de cada vértice del cuadrilátero en G es 3, entonces el siguiente es un subgrafo de G:



Debemos usar aquí también que no hay regiones triangulares. Observar que ya están representados los ocho vértices de G.

(3) Como cada arista del cuadrilátero está en el borde de dos regiones de grado cuatro, la única forma de agregar las cuatro aristas restantes da como resultado el cubo.

- $\underline{m = 3 \text{ y } n = 5}$: En este caso tenemos $a = 30$, $v = 20$ y $r = 12$. Aquí podemos usar un argumento similar al del caso anterior para ver que G es el dodecaedro. Con los dos casos restantes se puede proceder de la misma manera.
- $\underline{m = 4 \text{ y } n = 3}$: Luego $a = 12$, $v = 6$ y $r = 8$. Lo que determina el octaedro.
- $\underline{m = 5 \text{ y } n = 3}$: Aquí tenemos $e = 30$, $v = 12$ y $r = 20$. Luego G es el icosaedro.

□

Observación 6.4.10. El problema de determinar cuáles son todos los sólidos platónicos es equivalente a este otro: ¿de cuántas formas se puede hacer una pelota de futbol cosiendo cascos de cuero iguales con forma poligonal?

Ejercicio 6.4.11. Dibujar en el plano el grafo determinado por los cascos hexagonales y pentagonales en una pelota de futbol clásica.

Ejercicio 6.4.12. Determinar cuántos isomorfismos de la forma $f : G \to G$ existen para G cada uno de los solidos platónicos.

Apéndice A

Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Los axiomas aquí listados fueron propuestos por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel a principios del siglo XX. En estos se establace cómo interactuan los objetos de la teoría (los conjuntos) mediante de la pertenencia.

Aquí se cambia un poco la notación con respecto al Capítulo 1, pues tanto los conjuntos como los elementos de los conjuntos son la misma clase de objetos. Es importante tener en cuenta que este anexo está por fuera del programa y que maneja un lenguaje más complejo que el del curso.

A.1. Axioma de extensión

Un conjunto x es igual al conjunto y si y solo si tienen los mismo elementos.

Esto se puede escribir:

$$x = y \Leftrightarrow \forall z, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

A.2. Axioma de conjunto vacío

Existe un conjunto que no tiene elementos, al que notamos por $\emptyset$.

Escrito de otra forma:

$$\exists \emptyset : \forall x, x \notin \emptyset$$

A.3. Axioma de pares

Dado cualquier par de conjuntos x y y, existe un conjunto $\{x, y\}$.

A.4. Axioma de la unión

Dado un conjunto x existe otro conjunto llamado **unión de** x cuyos elementos son todos los elementos de los conjuntos pertenecientes a x. Este es notado por

$$\bigcup x = \{z : z \in y \in x\}.$$

A.5. Axioma del conjunto de partes

Sea x un conjunto. Luego existe un conjunto, llamado **conjunto de partes de** x, cuyos elementos son todos los subconjuntos de x. Notamos a este conjunto por $\mathcal{P}(x)$. Es decir

$$\mathcal{P}(x) = \{y : y \subset x\}.$$

A.6. Axioma de infinitud

Existe un conjunto inductivo. Es decir que existe un conjunto x con la siguientes propiedades:

- $\emptyset \in x$; y
- si $y \in x$, entonces $suc(y) = y \cup \{y\} \in x$.

Este axioma permite por ejemplo construir el conjunto de los números naturales como la intersección de todos los conjuntos inductivos.

A.7. Esquema axiomático de especificación

Sea $P(z)$ una propiedad con una variable z. Entonces para todo conjunto x existe un subconjunto y de x cuyos elementos son exactamente los elementos de x que cumplen la propiedad P. Este conjutno se puede escribir

$$y = \{z \in x : P(z)\}.$$

Por poner un ejemplo, vemos el conjunto de los números naturales pares se define por:

$$\{n \in \mathbb{N} : P(n)\},$$

donde $P(n)$ significa: $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$.

A.8. Axioma de reemplazo

Si x es un conjunto y ϕ es una fórmula de dos variables (es decir una propiedad que relaciona dos conjuntos) tal que para todo $y \in x$ existe un único z tal que $\phi(y, z)$, entonces existe un conjunto w tal que $z \in w$ si y solo si $\phi(y, z)$ para algún $y \in x$.

A.9. Axioma de buena fundación

Para todo conjunto x existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$.

A.10. Axioma de elección

Este no es uno de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, sin embargo suele agregarse a la teoría.

Dado un conjunto x existe $f : x \to \bigcup x$ tal que para todo $y \in x$, $f(y) \in y$.

Esto quiere decir que dada una familia de conjuntos, existe una forma de elegir un elemento de cada uno de los conjuntos.

Hay varias sentencias que son equivalentes al axioma de elección en la teoría de conjuntos. Citamos un par de ellas que tienen relación con temas del curso:

Principio de buana ordenación: En todo conjunto X admite un buen orden. Es decir que puede definirse una relación de orden total $\leq$ en X tal que todo subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo.

Lema de Zorn: Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado tal que toda cadena tiene cota superior. Entonces X tiene un elemento maximal.

Bibliografía

[G] Ralph Grimaldi; *Matemática discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones.*

[H] Paul Halmos; *Teoría intuitiva de conjuntos.*

[L] Chung Laung Liu; *Introduction to combinatorial mathematics.*

[W] Dougles West; *Introduction to graph theory.*