Ejercicios de examen de Probabilidad

Centro de Matemática

31 de julio de 2020

Los siguientes son algunos ejercicios de examenes pasados del Cmat del curso de probabilidad. No tienen el formato exacto de los que vamos a tener en el examen, pero muestran el tipo de dificultad esperable.

Ejercicio 1. Para enviar un mensaje binario se utiliza una máquina que comete, al enviar cada bit, un error con distribución normal de media 0 y desviación 1/8. Se toma el siguiente criterio: si se recibe un valor menor a 0.5 se asume que llegó un 0, en otro caso se asume que llegó un 1.

i) Calcular la probabilidad de error en el envío de un bit.

A partir de ahora suponga que la probabidad de error en el envío de un bit es 0,1. Se quiere enviar un mensajes de 10 bits. El mensaje recibido se considera erróneo si algún bit llegó alterado. El costo de recibir un mensaje erróneo es 1000, el costo de envío de cada bit es 1. Se proponen 3 alternativas para el envío del mensaje

(a) Se envían los 10 bits normalmente

(b) Se envía cada bit 2 veces, si difieren los dos envíos se envía una tercera vez.

(c) Se envían los 10 bits normalmente, y se envía un bit más de modo que el mensaje total (de 11 bits) tenga una cantidad par de unos. Con esto se puede detectar si se comete un único error. Desprecie la probabilidad de que se cometan 3 o más errores y tenga en cuenta que si se cometen 2 errores no se pueden detectar y el mensaje se recibe erróneo. Si se logra detectar que hubo un error se vuelve a realizar el procedimiento hasta tener éxito.

ii) Hallar el costo esperado del envío de un mensaje con cada uno de los métodos planteados.

Ejercicio 2. (17 de enero del 2000) Cinco hombres de cada 100 y 25 mujeres de cada 10.000 son daltónicos. Se elige una persona al azar, que resulta ser daltónica. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre, suponiendo que hay igual número de hombres que de mujeres en la población?

Ejercicio 3. (Marzo de 2005)

José tiene sus medias sueltas, rojas y negras, en un mismo cajón. Desea que la probabilidad de extraer al azar dos medias rojas sea exactamente un medio.

(a) Calcular el número mínimo de medias rojas y negras que debe tener el cajón.

(b) Calcular el número mínimo de medias rojas y negras que debe tener el cajón, si la cantidad de medias negras es par.

Ejercicio 4. Se eligen, en forma independiente, dos números reales al azar en el intervalo $[0, 1]$

(a) Calcular la distribución del mínimo y del máximo de ambos números.

(b) Calcular la distribución y la densidad del promedio de ambos.

(c) Calcular la probabilidad de que con los tres segmentos obtenidos se pueda formar un triángulo.

Ejercicio 5.(23 de agosto de 2003) Sean X e Y variables aleatorias independientes, tales que $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$, y $Y \sim U[0, 1]$.

1. Hallar la distribución de $W = X + Y$.
2. Hallar la distribución de $Z = XY$.
3. Escribir F_Z como $\alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2$ con F_1 discreta y F_2 absolutamente continua.

Ejercicio 6. (18 de agosto de 2006) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución exponencial con parámetro $a > 0$.

(a) Calcular la distribución de la variable aleatoria

$$Y_n = \text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(b) Calcular la distribución de la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{Y_n}{\mathbf{E}(Y_n)}.$$

(c) Calcular $\mathbf{v}\mathrm{ar}(Z_n)$.

Ejercicio 7.(15 de diciembre de 2003).

1. Sea X una variable aleatoria con densidad

$$\begin{cases} \alpha(\frac{\pi^2}{4} - x^2) & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Hallar α.

2. Se construye un triángulo tal que dos de sus lados valen 1, y el ángulo entre estos dos lados vale X. Sea Y el área de este triángulo. Sean los conjuntos $A = \{Y > 1/4\}$ y $B = \{X > \pi/3\}$. Hallar:

   a) $P(A)$.
   b) $P(A|B)$.
   c) $P(B^c|A)$.

3. Si llamamos , ϕ, θ a los otros dos ángulos del triángulo de la parte anterior, hallar la probabilidad de que el producto $\phi\theta$ sea menor que 1.

4. Hallar la densidad de la variable Y.

Ejercicio 8. (23 de diciembre de 2004) La probabilidad de que un helicóptero cumpla una misión exitosamente es 3/4. Se estiman necesarios 6 helicópteros para una tarea global, por lo que se envían 8, dado que $8 \times (3/4) = 6$.

(a) Calcular la probabilidad de que la misión se cumpla con éxito, es decir, por lo menos 6 helicópteros cumplan la misión.

(b) Determinar la cantidad aproximada de helicópteros necesaria para que la tarea global se cumpla exitosamente con una probabilidad mayor que 0,99.

Ejercicio 9. A dos ventanillas desocupadas llegan dos personas, **A** y **B**. Sus tiempos de atención son independientes y tienen distribución exponencial, con esperanza igual a una hora.

(a) Calcular las distribuciones del tiempo de atención de la primera persona que sale, y el de la segunda.

(b) Inmediatamente despés de llegar **A** y **B** llega **C**, que tiene la misma distribución de tiempo de atención. Calcular la probabilidad de que **C** no sea el último en retirarse.

Ejercicio 10. (13 de diciembre de 2006). Se considera un punto P elegido al azar en un círculo de radio R. Sea ρ la distancia de P al centro del círculo y ϕ el ángulo entre OP y una semirrecta fija que parte del origen.

(a) Hallar la distribución y la densidad de ρ y de ϕ.

(b) Calcular la esperanza y la varianza de ρ.

(c) Determinar si las variables aleatorias (ρ, ϕ) son independientes.

Ejercicio 11. (17 de enero del 2000). Cinco hombres de cada 100 y 25 mujeres de cada 10.000 son daltónicos. Se elige una persona al azar, que resulta ser daltónica. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre, suponiendo que hay igual número de hombres que de mujeres en la población?

Ejercicio 12. (19 de febrero de 2003) Sea X una varianle aleatoria con función de distribución F_X continua, y Z otra variable aleatoria que verifica $P\{Z = 1\} = P\{Z = -1\} = 1/2$, independiente de X.

1. Si $U = XZ$, verificar que $F_U(t) + F_U(-t) = 1 \ \forall t \in R$ (es decir, U tiene distribución simétrica respecto a 0). En este caso diremos que U es una simetrización de X.

2. Si X tiene densidad f_X, hallar la densidad de U y verificar que $f_U(t) = f_U(-t) \, \forall t \in R$.

3. Si U tiene densidad
$$f_U(t) = \frac{1}{6} I_{(-2,1]}(t) + \frac{1}{3} I_{(-1,1)}(t) + \frac{1}{6} I_{[1,2)}(t),$$
hallar una variable aleatoria uniforme X de modo que U sea una simetrización de X.