21 de septiembre de 2018

ESPACIO DUAL

ANDRÉS ABELLA

Sean V y W espacios vectoriales. Si $S, T : V \to W$ son dos transformaciones lineales y $c \in \mathbb{K}$, definimos las funciones $S + T : V \to W$ y $cT : V \to W$ mediante

$$(S+T)(v) := S(v) + T(v); \quad (cT)(v) := cT(v), \quad \forall v \in V.$$

Es un ejercicio el probar que $S + T : V \to W$ y $cT : V \to W$ son también transformaciones lineales. Al conjunto de transformaciones lineales de V en W lo escribimos $\mathcal{L}(V, W)$. La prueba del siguiente resultado es rutinaria.

Proposición 1. *Si V y W espacios vectoriales, entonces $\mathcal{L}(V, W)$ con las operaciones anteriores es también un espacio vectorial.* □

Como el cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial, entonces para todo espacio vectorial V podemos considerar $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, que por lo que vimos anteriormente tiene también estructura de espacio vectorial. El espacio V^* se llama el *espacio dual* de V.

Ejemplos 2.
1. Si $V = \mathbb{K}^n$ y para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $\alpha_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ por $\alpha_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (\mathbb{K}^n)^*$.
2. Si $V = M_n$ y $A = (a_{ij}) \in M_n$, definimos la *traza* de A por $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Haciendo variar A en M_n obtenemos la función traza $\operatorname{tr} : M_n \to \mathbb{K}$. Es fácil de probar que vale $\operatorname{tr} \in (M_n)^*$.
3. Si $V = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$ y definimos $\alpha : C[0,1] \to \mathbb{R}$ por $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$, entonces $\alpha \in C[0,1]^*$.

De ahora en adelante asumiremos que los espacios son de dimensión finita.

Si V es un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, entonces definimos $e_1^*, \ldots, e_n^* : V \to \mathbb{K}$ mediante

$$e_i^*(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_i, \tag{1}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ y todo $i = 1, \ldots, n$. Es claro que vale $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$. Observar que $e_1^*, \ldots, e_n^*$ quedan caracterizadas por ser las transformaciones lineales de V en $\mathbb{K}$ que verifican

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Proposición 3. *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ definidos como antes. Entonces,*
1. *para todo $v \in V$ vale $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) e_i$;*
2. *para todo $\alpha \in V^*$ vale $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) e_i^*$.*

Dem. Sea $v \in V$. Como $\mathcal{B}$ es base de V, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. La fórmula (1) nos dice que es $e_i^*(v) = x_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) e_i$.

Sea ahora $\alpha \in V^*$. Si $v \in V$, usando la primer parte obtenemos

$$\alpha(v) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(v) e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha\left(e_i^*(v) e_i\right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(v) \alpha(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) e_i^*(v) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha(e_i) e_i^*\right)(v).$$

Como esto vale para todo $v \in V$, deducimos que es $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) e_i^*$. □

Proposición 4. *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ definidos como antes. Entonces $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ es una base de V^*.*

Dem. La segunda parte de la proposición anterior muestra que $\mathcal{B}^*$ es un conjunto generador de V^*. Probaremos que $\mathcal{B}^*$ es LI. Sean $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i e_i^* = 0$. Luego evaluando en la los elementos de la base $\mathcal{B}$, obtenemos

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i^*\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j, \quad \forall j = 1,\dots,n.$$

Esto prueba que $\mathcal{B}$ es LI y por lo tanto es base de V^*. $\square$

El conjunto $\mathcal{B}^*$ se llama la *base dual* de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 5. Si $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$, entonces $e_1^*,\dots,e_n^* \in (\mathbb{K}^n)^*$ están definidos por $e_i^*(x_1,\dots,x_n) = x_i$, para todo $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Si V y W son espacios vectoriales $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces definimos $T^* : W^* \to V^*$ mediante

$$T^*(\beta) := \beta \circ T, \quad \forall \beta \in W^*.$$

Es decir, $(T^*(\beta))(v) = \beta\big(T(v)\big)$, para todo $v \in V$.

Proposición 6. *Si V y W son espacios vectoriales $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $T^* : W^* \to V^*$ es también una transformación lineal.* $\square$

La siguiente proposición describe algunas propiedades de la correspondencia $T \mapsto T^*$.

Proposición 7.
1. *Para todo espacio V, vale $(\mathrm{Id}_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*} : V^* \to V^*$.*
2. *Si U, V, W son espacios vectoriales y $S : U \to V$ y $T : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.*
3. *Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces $T^* : W^* \to V^*$ es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.*

Dem. La primer afirmación es obvia. Para la segunda, es

$$(T \circ S)^*(\alpha) = \alpha \circ (T \circ S) = (\alpha \circ T) \circ S = S^*(\alpha \circ T) = S^*(\big(T^*(\alpha)\big) = (S^* \circ T^*)(\alpha), \quad \forall \alpha \in W^*.$$

Para la tercera, al ser $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$, aplicando las dos partes anteriores obtenemos

$$\left(T \circ T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1} \circ T\right)^* = (\mathrm{Id}_V)^* \quad \Rightarrow \quad \left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* = \mathrm{Id}_{V^*}.$$

Luego de esta última igualdad se deduce que T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$. $\square$

Proposición 8. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Sean $\mathcal{B}$ una base de V y $\mathcal{C}$ una base de W. Entonces*

$$_{\mathcal{B}^*}[T^*]_{\mathcal{C}^*} = \left(_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}\right)^t.$$

Dem. Sean $\mathcal{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ y $\mathcal{C} = \{f_1,\dots,f_m\}$. Es $_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ si y solo si $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$, $\forall i = 1,\dots,n$ y es $_{\mathcal{B}^*}[T^*]_{\mathcal{C}^*} = (b_{ij})$ si y solo si

$$T^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji} e_j^*, \quad \forall j = 1,\dots,n. \tag{2}$$

Por otro lado aplicando la segunda parte de la proposición 3 es

$$\begin{aligned} T^*(f_i^*) &= \sum_{j=1}^n \big(T^*(f_i^*)\big)(e_j)\, e_j^* = \sum_{j=1}^n f_i^*\,(T(e_j))\; e_j^* = \sum_{j=1}^n f_i^* \left(\sum_{k=1}^m a_{kj} f_k\right) e_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{kj} f_i^*(f_k)\, e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_{kj} \delta_{ik}\, e_j^* = \sum_{j=1}^n a_{ij}\, e_j^*. \end{aligned}$$

Comparando esta expresión de $T^*(f_i^*)$ con la de (2), deducimos que es $a_{ij} = b_{ji}$, para todo i, j. $\square$