31 de agosto de 2018

SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS

ANDRÉS ABELLA

Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Definimos su *intersección* $W_1 \cap W_2$ y su *suma* $W_1 + W_2$, mediante

$$W_1 \cap W_2 := \{v \in V : \; v \in W_1 \text{ y } v \in W_2\}, \qquad W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : \; w_1 \in W_1, \; w_2 \in W_2\}.$$

Proposición 1. *Si W_1, W_2 son subespacios de V, entonces $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son también subespacios.* $\square$

Observación 2. Dados dos subespacios W_1, W_2, su intersección $W_1 \cap W_2$ es el mayor subespacio contenido en W_1 y W_2, mientras que $W_1 + W_2$ es el menor subespacio que contiene a W_1 y W_2.

Ejemplos 3. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$.

1. Si $W_1 = \{(x, y, z) : \; z = 0\}$ (plano Oxy) y $W_2 = \{(x, y, z) : \; y = 0\}$ (plano Oxz), entonces
$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) : \; y = z = 0\} \text{ (eje Ox)}, \qquad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3.$$
2. Si $W_1 = \{(x, y, z) : \; y = z = 0\}$ (eje Ox) y $W_2 = \{(x, y, z) : \; x = z = 0\}$ (eje Oy), entonces
$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}, \qquad W_1 + W_2 = \{(x, y, z) : \; z = 0\} \text{ (plano Oxy)}.$$

La siguiente proposición relaciona las dimensiones de $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$, con las de W_1 y W_2.

Proposición 4. *Si W_1, W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio V, entonces vale*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de $W_1 \cap W_2$. Como $\mathcal{B}$ es un subconjunto LI de W_1 y de W_2, entonces existen $v_1, \ldots, v_p \in W_1$ y $w_1, \ldots, w_q \in W_2$, tales que si

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_q\},$$

entonces $\mathcal{B}_1$ es base de W_1 y $\mathcal{B}_2$ es base de W_2. Probaremos que $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\}$ es base de $W_1 + W_2$. La prueba de que $\mathcal{C}$ es un conjunto generador de $W_1 + W_2$ es fácil y queda como ejercicio. Veamos que $\mathcal{C}$ es LI. Sean escalares a_i, b_j, c_k tales que

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_pv_p + c_1w_1 \cdots + c_qw_q = 0. \tag{1}$$

Luego

$$c_1w_1 \cdots + c_qw_q = -(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_pv_p). \tag{2}$$

Como el lado izquierdo de (2) está en W_2 y el derecho en W_1, deducimos $c_1w_1 \cdots + c_qw_q \in W_1 \cap W_2$. Luego existen escalares d_i tales que

$$c_1w_1 \cdots + c_qw_q = d_1u_1 + \cdots + d_nu_n \quad \Rightarrow \quad c_1w_1 \cdots + c_qw_q + (-d_1)u_1 + \cdots + (-d_n)u_n = 0.$$

Dado que $\mathcal{B}_2$ es LI, deducimos $c_1 = \cdots = c_q = d_1 = \cdots = d_n = 0$. Sustituyendo estos valores en (1) obtenemos

$$a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_pv_p = 0.$$

Ahora usando que $\mathcal{B}_1$ es LI deducimos $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_p = 0$. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es LI y por lo tanto es base de $W_1 + W_2$. Luego

$$\dim(W_1 + W_2) = n + p + q = (n + p) + (n + q) - n = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \quad \square$$

Observación 5. La proposición anterior se suele usar para calcular la dimensión de la suma de dos subespacios, ya que en general es más fácil determinar la intersección que la suma.

Ejemplo 6. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y consideramos los subespacios

$$W_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = 0, \ y + z + t = 0\right\} \quad \text{y} \quad W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ t = 0\right\}.$$

Es fácil de probar que es $\dim W_1 = 2$ y $\dim W_2 = 3$. Además

$$W_1 \cap W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = 0, \ y + z + t = 0, \ t = 0\right\} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = t = 0, \ y + z = 0\right\},$$

luego $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ y por lo tanto

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Luego $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

Definición 7. Sean W_1, W_2 dos subespacios de un espacio V. Decimos que un subespacio U de V es *suma directa* de W_1 y W_2 y escribimos $U = W_1 \oplus W_2$ si se cumple $U = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Ejemplo 8. Si consideramos los ejemplos 3, deducimos del primero que el espacio $\mathbb{R}^3$ es suma del plano Oxy con el plano Oxz, pero esta suma no es directa, y del segundo que el plano Oxy es suma directa de la recta Ox y la recta Oy. En el ejercicio 6 vemos también que $\mathbb{R}^4$ es suma de W_1 y W_2, pero esta suma no es directa.

Proposición 9. *Si W_1, W_2 son dos subespacios de V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si todo vector de V se escribe en forma única como suma de un vector de W_1 con uno de W_2.*

Dem. Ver la prueba de la proposición 15. □

De la proposición 4 y de su demostración, se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 10. *Sea V un espacio de dimensión finita y W_1, W_2 dos subespacios de V, tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Valen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases respectivas de W_1 y W_2, entonces su unión $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V.*
2. $dimV = \dim W_1 + \dim W_2$. □

Corolario 11. *Sean W_1, W_2 dos subespacios de un espacio de dimensión finita V tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Si $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$, entonces $V = W_1 \oplus W_2$.*

Dem. La proposición 10 implica $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$, luego $W_1 \oplus W_2 = V$. □

Este último corolario nos da un método fácil para probar que un espacio es suma directa de dos subespacios dados.

Ejemplo 12. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^3$ y los subespacios

$$W_1 = \{(x,y,z) : \ 2x + y + z = 0\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \{(x,y,z) : \ y = z = 0\}.$$

Si $(x,y,z) \in W_1 \cap W_2$, entonces vale

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y + z = 0 \\ y = z = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

Luego $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$. Por otro lado W_1 es un plano y W_2 una recta, así que es $\dim W_1 = 2$ y $\dim W_2 = 1$ y por lo tanto $\dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; luego $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

Observación 13. Dados dos subespacios W_1, W_2 de V, no alcanza con que valga $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ para que la suma sea directa, hay que probar que también vale $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Por ejemplo, si el espacio es $\mathbb{R}^3$ y consideramos los subespacios

$$W_1 = \{(x,y,z) : \ z = 0\} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \{(x,y,z) : \ y = z = 0\},$$

entonces W_1 es un plano y W_2 una recta, y por lo tanto $\dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Pero W_2 está contenido en W_1, luego $W_1 + W_2 = W_1 \subsetneq \mathbb{R}^3$ y por lo tanto nunca puede ser $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.

Generalización. A continuación veremos que todos los resultados anteriores para la suma e intersección de dos subespacios se pueden generalizar a una cantidad finita arbitraria de subespacios.

Sea V un espacio vectorial y $W_1, \ldots, W_m$ una cantidad finita de subespacios de V. Definimos su *intersección* $\bigcap_{i=1}^m W_i$ y su *suma* $\sum_{i=1}^m W_i$, mediante

$$\bigcap_{i=1}^m W_i := \{v \in V : \; v \in W_i, \; \forall i = 1, \ldots, n\}, \qquad \sum_{i=1}^m W_i := \left\{ \sum_{i=1}^m w_i : \; w_i \in W_i, \; \forall i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Proposición 14. *Si $W_1, \ldots, W_m$ son subespacios de V, entonces $\bigcap_{i=1}^m W_i$ y $\sum_{i=1}^m W_i$ son subespacios.* $\square$

La definición general de suma directa es un poco más delicada que para el caso de dos subespacios. Para definirla introducimos previamente el siguiente concepto.

Decimos que una familia[1] $\{W_1, \ldots, W_m\}$ de subespacios de V es *independiente* si verifica la siguiente condición.

$$\text{Si } w_i \in W_i, \; \forall i = 1, \ldots, m \text{ y } \sum_{i=1}^m w_i = 0, \text{ entonces } w_1 = \cdots = w_m = 0.$$

En lo que sigue escribimos $\sum_{j \neq i} W_j := W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_m, \; \forall i = 1, \ldots, m.$

Proposición 15. *Sea $\{W_1, \ldots, W_m\}$ una familia de subespacios de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La familia $\{W_1, \ldots, W_m\}$ es independiente.*
2. *Para cada $i = 1, \ldots, m$, vale $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{0\}$.*
3. *Si $W = \sum_{i=1}^m W_i$, entonces para todo $w \in W$, existen únicos $w_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, m$, tales que $w = \sum_{i=1}^m w_i$.*

Dem. $(1 \Rightarrow 2)$. Supongamos que la familia es independiente. Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si $w \in W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j$, entonces $w \in W_i$ y existen $w_j \in W_j$, para todo $j \neq i$ tales que

$$w = w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_{i+1} + \cdots + w_m \quad \Rightarrow \quad w_1 + \cdots + w_{i-1} + (-w) + w_{i+1} + \cdots + w_m = 0.$$

Como la familia es independiente, entonces todos los sumandos de la suma anterior son nulos, luego $w = 0$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Supongamos ahora que vale la segunda condición. Sean $w_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, m$, tales que $\sum_{i=1}^m w_i = 0$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, es

$$-w_i = w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_{i+1} + \cdots + w_m.$$

Como $-w_i \in W_i$ y $w_1 + \cdots + w_{i-1} + w_{i+1} + \cdots + w_m \in \sum_{j \neq i} W_j$, deducimos que es $-w_i \in W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{0\}$. Luego $w_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

$(3 \Rightarrow 1)$. Supongamos vale la tercer afirmación. Sean $w_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, m$, tales que $\sum_{i=1}^m w_i = 0$. Como $0 \in W_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $\sum_{i=1}^m 0 = 0$, entonces la unicidad implica que es $w_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Luego la familia $\{W_1, \ldots, W_m\}$ es independiente.

$(1 \Rightarrow 3)$. Supongamos ahora que la familia $\{W_1, \ldots, W_m\}$ es independiente. Si un elemento $w \in W$ se escribe de dos formas $w = \sum_{i=1}^m w_i$ y $w = \sum_{i=1}^m w_i'$, con $w_i, w_i' \in W_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces

$$\sum_{i=1}^m (w_i - w_i') = 0, \text{ siendo } w_i - w_i' \in W_i, \; \forall i = 1, \ldots, m.$$

Luego $w_i - w_i' = 0$ y por lo tanto $w_i = w_i'$, para todo $i = 1, \ldots, m$. $\square$

---

[1] En este texto llamaremos *familia* a un conjunto de conjuntos.

Observación 16. Una familia con solo dos subespacios W_1 y W_2 es independiente si y solo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, que es la condición que pedimos para que la suma $W_1 + W_2$ sea directa. Una familia de tres subespacios $\{W_1, W_2, W_3\}$ es independiente si y solo si W_1, W_2, W_3 verifican

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}, \quad W_2 \cap (W_1 + W_3) = \{0\}, \quad W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}.$$

Notar que las condiciones $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$ no implican las condiciones anteriores. Por ejemplo, si consideramos $V = \mathbb{K}^3$ y

$$W_1 = \{(x,0,0) :\ x \in \mathbb{K}\}, \quad W_2 = \{(0,y,0) :\ y \in \mathbb{K}\}, \quad W_3 = \{(x,x,0) :\ x \in \mathbb{K}\},$$

entonces es fácil de probar que las intersecciones dos a dos son triviales, pero $W_1 + W_2 = \{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{K}\}$, luego $W_3 \subset W_1 + W_2$ y por lo tanto $W_3 \cap (W_1 + W_2) = W_3 \neq \{0\}$.

Definición 17. Decimos que un subespacio W de V es *suma directa* de una familia de subespacios $\{W_1, \dots, W_m\}$ y escribimos $W = \bigoplus_{i=1}^m W_i$, si $W = \sum_{i=1}^m W_i$ y la familia $\{W_1, \dots, W_m\}$ es independiente.

Observación 18. Lo que distingue la suma directa de la suma, y la hace más interesante, es la unicidad de la tercer afirmación de la proposición 15. Es similar a la diferencia entre una base y un conjunto generador.

Corolario 19. *Sea $\{W_1, \dots, W_m\}$ una familia de subespacios de un espacio V. Entonces $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ si y solo si para todo $v \in V$, existen únicos $w_i \in W_i$, $i = 1, \dots, m$, tales que $v = \sum_{i=1}^m w_i$.* □

Ejemplo 20. Es fácil probar usando el corolario 19 que vale $M_n = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, siendo W_1 es el espacio de las matrices estrictamente triangulares inferiores, W_2 el de las matrices estrictamente triangulares superiores y W_3 el de las matrices diagonales, es decir

$$W_1 = \{(a_{ij}) :\ a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}, \quad W_2 = \{(a_{ij}) :\ a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}, \quad W_1 = \{(a_{ij}) :\ a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}.$$

Diagramáticamente, la descomposición $M_n = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ consiste en escribir $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$.

El siguiente resultado es fácil de probar.

Proposición 21. *Sean $W, W_1, \dots, W_m$ subespacios de V tales que $W = \sum_{i=1}^m W_i$. Si $\mathcal{G}_i$ es un conjunto generador de W_i, para todo $i = 1, \dots, m$, entonces su unión $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{G}_i$ es un conjunto generador de W.* □

A continuación veremos cómo se relaciona la suma directa con la dimensión.

Proposición 22. *Sean $W, W_1, \dots, W_m$ subespacios de dimensión finita de un espacio V, tales que $W = \bigoplus_{i=1}^m W_i$. Vale lo siguiente.*

1. *Si $\mathcal{B}_i$ es una base de W_i, para todo $i = 1, \dots, m$, entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$ es una base de W.*
2. $\dim W = \sum_{i=1}^m \dim W_i$.

Dem. Por la proposición anterior sabemos que $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de W, lo que resta probar es que es LI. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea $\mathcal{B}_i = \{w_1^i, \dots, w_{l_i}^i\}$. Supongamos que tenemos escalares a_j^i tales que

$$a_1^1 w_1^1 + \cdots + a_{l_1}^1 w_{l_1}^1 + \cdots + a_1^m w_1^m + \cdots + a_{l_m}^m w_{l_m}^m = 0.$$

Como $a_1^i w_1^i + \cdots + a_{l_i}^i w_{l_i}^i \in W_i$ (para todo i) y la familia $\{W_1, \dots, W_m\}$ es independiente, deducimos que es

$$a_1^i w_1^i + \cdots + a_{l_i}^i w_{l_i}^i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Luego como cada $\mathcal{B}_i$ es LI, deducimos que es $a_j^i = 0$, para todo i, j y por lo tanto $\mathcal{B}$ es LI. La segunda afirmación se deduce inmediatamente de la primera. □

Corolario 23. *Sean $W_1, \dots, W_m$ subespacios de un espacio de dimensión finita V. Si $\{W_1, \dots, W_m\}$ es una familia independiente y vale $\dim V = \sum_{i=1}^m \dim W_i$, entonces $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$.* □