Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Examen. 12/12/2018.

1. (**25 puntos**)
Sea V un espacio vectorial **real** de dimensión finita con producto interno.
   a) Sea W un subespacio de V tal que $\{0\} \neq W \subsetneq V$. Definimos un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ por $T|_W = \mathrm{Id}$ y $T|_{W^\perp} = -\mathrm{Id}$.
      1) Hallar los valores propios y subespacios propios de T.
      2) Probar que T es una isometría autoadjunta.
   b) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una isometría autoadjunta, $T \neq \pm \mathrm{Id}$. Probar que existe un subespacio propio W de $\mathbb{R}^3$ tal que $T|_W = \mathrm{Id}$ y $T|_{W^\perp} = -\mathrm{Id}$.

2. (**25 puntos**)
Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es
$$\Phi(x,y,z) = 6x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 6xz + 4yz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
   a) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal.
   b) Se considera la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinar si existe o no una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $B = M_{\mathcal{C}}(\varphi)$.

3. (**25 puntos**)
Sea $A \in M_n(\Bbbk)$ una matriz invertible y $m_A(t) = t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ su polinomio minimal.
   a) Probar $b_0 \neq 0$.
   b) Sea $p(t)$ un polinomio de grado r tal que $p(A^{-1}) = 0$ y $p(0) \neq 0$. Probar que r es mayor o igual que el grado de $m_A(t)$. *Sugerencia:* notar que $A^r p(A^{-1})$ es un polinomio en A.
   c) Probar que los polinomios minimales de A y de A^{-1} tienen el mismo grado.
   d) Probar que el polinomio minimal de A^{-1} es $m_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{b_0} t^k m_A(1/t)$.

4. (**25 puntos**)
Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$$T(x,y,z,t) = (4x + y + z + t,\ 4y,\ -x - y + 3z - t,\ x + y + z + 5t), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$
   a) Hallar la forma de Jordan.
   b) Hallar una base de Jordan.

Solución.

1. *a*) 1) Es $V = W \oplus W^{\perp}$ y vale $W \subset \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$ y $W^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id})$. Luego es

$$V = \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id}), \qquad \text{siendo } \operatorname{Ker}(T \pm \operatorname{Id}) \neq \{0\}.$$

Luego los valores propios de T son ± 1 y los subespacios propios son $W = \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$ y $W^{\perp} = \operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id})$.

2) Tomando una base $\mathcal{B}$ del espacio formada uniendo bases ortonormales de W y $W^{\perp}$, deducimos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal formada por vectores propios de T, luego T es autoadjunta. Como los valores propios de T son ± 1, deducimos que T es una isometría (aplicando el teorema espectral).

b) Como los valores propios de una isometría real solo pueden ser ± 1 y es $T \neq \pm \operatorname{Id}$, deducimos que los valores propios de T son ± 1. Luego como T es autoadjunta deducimos

$$V = \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id}).$$

Como T es normal, entonces $\operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$ y $\operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id})$ son ortogonales, entonces de la igualdad anterior deducimos $\operatorname{Ker}(T + \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})^{\perp}$. Luego $W = \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$ verifica lo pedido.

2. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada es

$$\Phi(x, y, z) = 12x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16xy + 12xz + 8yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Aplicando el algoritmo de diagonalización obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(0, 1, 0),\, (1, -2, 0),\, (-1/2, 0, 1)\}, \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Aplicando el algoritmo de diagonalización obtenemos que la matriz B es congruente con

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz y $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ tienen distintos invariantes, deducimos que la respuesta es negativa.

3. Escribimos $A^{-l} := (A^{-1})^l$, $l = 0, 1, \ldots$.

a)

$$b_0 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es invertible.}$$

b) Sea $p(t) = c_r t^r + \cdots + c_1 t + c_0$ un polinomio tal que $p\left(A^{-1}\right) = 0$, siendo $c_r \neq 0$ y $c_0 \neq 0$. Luego

$$0 = A^r p\left(A^{-1}\right) = A^r (c_r A^{-r} + \cdots + c_1 A^{-1} + c_0 I) = c_r I + \cdots + c_1 A^{r-1} + c_0 A^r.$$

Entonces vale $q(A) = 0$, siendo $q(t) = c_0 t^r + \cdots + c_r$. Luego $c_0 \neq 0$ implica $r = \operatorname{gr} q(t) \geq \operatorname{gr} m_A(t)$.

c) Como A^{-1} es invertible, entonces $m_{A^{-1}}(0) \neq 0$ (parte 1). Luego la parte 2 implica $\operatorname{gr} m_{A^{-1}}(t) \geq \operatorname{gr} m_A(t)$. Poniendo A^{-1} en la fórmula anterior obtenemos $\operatorname{gr} m_A(t) \geq \operatorname{gr} m_{A^{-1}}(t)$, luego coinciden.

d)

$$0 = A^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = A^k \left(I + b_{k-1}A^{-1} + \cdots + b_1 A^{1-k} + b_0 A^{-k} \right)$$
$$= A^k b_0 \left(A^{-k} + \frac{b_1}{b_0} A^{1-k} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{b_0} A^{-1} + \frac{1}{b_0} I \right)$$

Luego $r\left(A^{-1}\right) = 0$, siendo

$$r(t) := t^k + \frac{b_1}{b_0} t^{k-1} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{b_0} t + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{b_0} t^k m_A(1/t)$$

Como $r(t)$ es mónico del mismo grado que $m_A(t)$, por la parte anterior deducimos $r(t) = m_{A^{-1}}(t)$.

4. *a*) Es $T = L_A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $\chi_A(t) = (t-4)^4$ y vale

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A-4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $\mathrm{MG}(4) = 4 - r(A-4I) = 2$ y por lo tanto hay dos bloques de Jordan y los posibles polinomios minimales de A son $(t-4)^2$ y $(t-4)^3$. Al ser $(A-4I)^2 \neq 0$ deducimos que es $m_A(t) = (t-4)^3$. Luego la forma de Jordan de T es

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) De acuerdo a la forma de J, una base de Jordan correspondiente a T va a ser de la forma

$$\mathcal{B} = \left\{ (T-4I)^2(v),\, (T-4I)(v),\, v,\, u \right\},$$

siendo

$$v \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{Ker}\,(T-4I)^2, \quad u \in \mathrm{Ker}\,(T-4I), \quad \{(T-4I)^2(v), u\} \text{ LI.}$$

Tomamos $v = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathrm{Ker}\,(T-4I)^2$. Es $\mathrm{Ker}\,(T-4I) = \{(x,y,z,t) :\ x = 0,\ y+z+t = 0\}$ y vale $(T-4I)^2(v) = (0,0,-1,1)$. Luego podemos tomar $u = (0,1,-1,0)$ y la base queda

$$\mathcal{B} = \{(0,0,-1,1),\ (1,0,-1,1),\ (0,0,0,1),\ (0,1,-1,0)\}.$$