Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Examen. 04/02/2019.

1. (**25 puntos**)

   a) Probar que $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ es normal y no es simétrica si y solo si vale $t = x$, $z = -y$ e $y \neq 0$.

   b) Sea V un espacio vectorial **real** con producto interno de dimensión finita. Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal y diagonalizable, entonces T es autoadjunto.

2. (**25 puntos**)
   Se considera la forma bilineal φ en $\mathbb{R}^4$ cuya forma cuadrática asociada es

   $$\Phi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt + 2yz - 4yt.$$

   a) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ en la cual la matriz asociada a φ sea diagonal.

   b) Hallar el rango y la signatura de φ.

3. (**30 puntos**)
   Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$T(x, y, z) = (-y - z,\ x + y,\ y + 2z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar el polinomio característico y el minimal de T.

   b) Hallar una base de Jordan correspondiente a T.

4. (**20 puntos**)
   Hallar la forma de Jordan de la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Sugerencia: recordar que si una matriz cuadrada P es de la forma $P = \left(\begin{smallmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$, siendo Q y R matrices cuadradas, entonces su determinante verifica $\det P = \det Q \det R$. Se sugiere también hacer primero el ejercicio 3.

Solución.

Solución:

1. *a*) Es

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \; A^t = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AA^t = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xz+yt \\ xz+yt & z^2+t^2 \end{pmatrix}, \quad A^tA = \begin{pmatrix} x^2+z^2 & xy+zt \\ xy+zt & y^2+t^2 \end{pmatrix}.$$

Luego A no es simétrica si y solo si $y \neq z$, y A es normal y si y solo si

$$x^2+y^2 = x^2+z^2, \; xz+yt = xy+zt, \; z^2+t^2 = y^2+t^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm y, \quad xz+yt = xy+zt.$$

Luego es $z = -y$ y por lo tanto la ultima ecuación queda en $y(x-t) = 0$. Si fuese $y = 0$ entonces sería $z = -y = 0$ y por lo tanto $z = y (= 0)$ $\lightning$. Luego es $t = x$, $z = -y$ e $y \neq 0$.

b) T diagonalizable implica $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(T - \lambda_i)$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T. Como T es normal, entonces estos sus subespacios propios son ortogonales dos a dos. Luego tomando una base $\mathcal{B}$ del espacio formada uniendo bases ortonormales de estos subespacios, obtenemos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T. Al ser $\Bbbk = \mathbb{R}$, esto equivale a que T sea autoadjunto.

2. *a*) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica, entonces

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el algoritmo de diagonalización obtenemos que una posibilidad es

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), \, (0,1,0,-1), \, (-2,-1,3,2), \, (1,0,0,1)\}, \; M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) El rango es 3 y la signatura es $2 - 1 = 1$.

3. *a*) Es $T = L_B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $\chi_T(t) = -(t-1)^3$. El rango de $B - I$ es 2, luego $\mathrm{MG}(1) = 1$ y por lo tanto la forma de Jordan de T es $J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego el polinomio minimal es $m_T(t) = (t-1)^3$.

b) Por la forma de Jordan de T deducimos que la base de Jordan $\mathcal{B}$ está formada solo por un ciclo

$$\mathcal{B} = \left\{(B-I)^2(v), \, (B-I)(v), \, v\right\},$$

siendo v un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ que no esté en $\operatorname{Ker}(B-I)^2 = \{(x,y,z) : \; x+y+z = 0\}$. Por ejemplo tomando $v = (1,1,1)$ obtenemos

$$\mathcal{B} = \{(0,-3,3), \, (-3,1,2), \, (1,1,1)\}.$$

4. Notar que es $A = \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, siendo B la matriz anterior y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $\chi_A(t) = \chi_B(t)\chi_C(t) = (t-1)^4(t+1)^2$ y por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in M_4(\mathbb{R}),\ A_2 \in M_2(\mathbb{R}).$$

Vale $r(A+I) = 4$, luego $\mathrm{MG}(-1) = 2$ y por lo tanto $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Vale $r(A-I) = 4$, luego $\mathrm{MG}(1) = 2$; esto implica que A_1 tiene dos bloques de Jordan. Luego los posibles polinomios minimales de A son $(t-1)^3(t+1)$ y $(t-1)^2(t+1)$. Consideremos $p(t) = (t-1)^2(t+1)$. Si fuese $p(A) = 0$, entonces sería $p(B) = 0$, luego $m_B(t) = (t-1)^3$ dividiría a $p(t) = (t-1)^2(t+1)$. Como esto no es posible, deducimos que es $m_A(t) = (t-1)^3(t+1)$. Luego la forma de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$