Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Examen. 27/02/2019.

1. (**30 puntos**)

   Se considera la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

   a) Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.

   b) Calcular A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) Calcular[1] $\lim_{n\to\infty} A^n$.

2. (**35 puntos**)

   Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión 3 y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal que **no** es autoadjunto.

   a) Probar que T tiene un valor propio $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

   b) Sea $W = \operatorname{Ker}(T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{\perp}$. Probar que W es T-invariante y T^*-invariante.

   c) Probar que vale $\operatorname{MG}(\lambda_0) = 1$.

   d) Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & -y & x \end{pmatrix}$ para ciertos $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$.

   Sugerencia: es sabido que si una matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ es normal y no es simétrica, entonces $t = x$, $z = -y$ e $y \neq 0$.

3. (**35 puntos**) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por
   $$T(x, y, z, t) = (2x,\ -3x - y,\ 2x + 3y + 2z,\ -x - y + t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Hallar la forma de Jordan J de T.

   b) Hallar el polinomio minimal de T.

   c) Hallar una base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $J = [T]_{\mathcal{D}}$.

[1] El límite se calcula tomando límites en cada entrada de la matriz.

Solución.

1. *a)* Los valores propios son 1 y 1/5. Los subespacios propios son

$$E_1 = [(7,1)], \quad E_{1/5} = [(1,-1)].$$

b) Es $A = QDQ^{-1}$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$A^n = \left(QDQ^{-1}\right)^n = QD^nQ^{-1} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7+\frac{1}{5^n} & 7-\frac{1}{5^n} \\ 1-\frac{1}{5^n} & 1+\frac{1}{5^n} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7+\frac{1}{5^n} & 7-\frac{1}{5^n} \\ 1-\frac{1}{5^n} & 1+\frac{1}{5^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *a)* El polinomio característico $\chi_T(t)$ es un polinomio real de grado 3, por lo cual admite alguna raíz λ_0 (teorema de Bolzano).

b) Sea $W = \operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id})^\perp$. Como T es normal, si $v \in V$ verifica $T(v) = \lambda v$, entonces $T^*(v) = \lambda v$. De acá se deduce fácilmente que W es T-invariante y T^*-invariante.

c) Sabemos que vale $1 \leq \operatorname{MG}(\lambda_0) \leq 3$.
Si $\operatorname{MG}(\lambda_0) = 3$, entonces $T = \lambda_0 \operatorname{Id}$ que es autoadjunta $\lightning$.
Si $\operatorname{MG}(\lambda_0) = 2$, entonces $V = \operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id}) \oplus W$, con $\dim W = 1$. Como W es T-invariante de dimensión 1, entonces es un subespacio propio de T y por lo tanto uniendo una base ortonormal de $\operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id})$ con una base ortonormal de W obtenemos una base ortonormal de V (porque son subespacios ortogonales); luego T sería autoadjunta ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$) $\lightning$.
Así que la única posibilidad es $\operatorname{MG}(\lambda_0) = 1$.

d) Como W es T-invariante y T^*-invariante, y T es normal, se deduce que $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ es normal. Si $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ fuese autoadjunto, el mismo argumento de la parte anterior ($\operatorname{MG}(\lambda_0) = 2$) implicaría que T es autoadjunto $\lightning$. Luego $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ es normal y no es autoadjunto.

Es $V = \operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id}) \oplus W$, con $\dim W = 2$, $W = \operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id})^\perp$ y $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ normal y no autoadjunto. Sea $\mathcal{C}$ una base ortonormal de W. Entonces $[T|W]_{\mathcal{C}}$ es una matriz normal no simétrica, luego es de la forma descrita en la sugerencia. Sea $0 \neq v_0 \in \operatorname{Ker}(T-\lambda_0 \operatorname{Id})$. Entonces $\mathcal{B} := \{v_0\} \cup \mathcal{C}$ es una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & -y & x \end{pmatrix}$$

para ciertos $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$.

3. *a*) La matriz asociada a T en la base canónica $\mathcal{C}$ es

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es $\chi_T(t) = (t-2)^2(t+1)(t-1)$. Calculando obtenemos

$$r(T-2I) = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{MG}(2) = 1,$$

luego hay un bloque de jordan para el valor propio 2 y por lo tanto la forma de Jordan de T es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) El tamaño del mayor bloque de Jordan correspondiente a un valor propio, da el exponente de ese valor propio como raíz del polinomio minimal. Luego $m_T(t) = \chi_T(t) = (t-2)^2(t+1)(t-1)$.

c) Operando obtenemos

$$\mathrm{Ker}\,(T-I) = [(0,0,0,1)], \quad \mathrm{Ker}\,(T+I) = [(0,2,-2,1)];$$
$$\mathrm{Ker}\,(T-2I) = [(0,0,1,0)], \quad \mathrm{Ker}\,(T-2I)^2 = [(0,0,1,0),\,(-1,1,0,0)].$$

Además $(T-2I)(-1,1,0,0) = (0,0,1,0)$. Luego

$$\mathcal{D} = \{(0,0,1,0),\,(-1,1,0,0),\,(0,2,-2,1),\,(0,0,0,1)\}.$$