Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal 2
Segundo semestre de 2020

Examen. 28/12/2020.

1. **25 puntos.**

   Se considera la forma cuadrática Φ en $\mathbb{R}^3$ definida por

   $$\Phi(x, y, z) = 2y^2 + 2xy - 2xz + 2yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar el rango y la signatura de Φ.

   b) Hallar un subespacio de dimensión máxima en el cual Φ sea definida positiva.

2. **25 puntos.**

   Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual (escalar) y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definido por

   $$T(x, y, z) = (x - y - z,\ -x + 2z,\ -x + 2y), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Investigar si T es autoadjunto, normal o isometría.

   b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de T.

3. **25 puntos.**

   Sean V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.

   a) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador autoadjunto, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos y $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ los subespacios propios correspondientes. Probar que si $W \subset V$ es un subespacio T-invariante, entonces

   $$W = (W \cap E_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W \cap E_{\lambda_k}).$$

   Sugerencia: notar que el operador restricción $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ es autoadjunto.

   b) Si $\dim V = 3$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador autoadjunto que tiene tres valores propios distintos, ¿cuantos subespacios de V hay que sean T-invariantes?

4. **25 puntos.**

   Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ que verifica $T^4 - 8T^3 + 24T^2 - 32T + 16\,\mathrm{Id} = 0$.

   a) Probar que T es invertible y escribir su inverso como un polinomio evaluado en T.

   b) Supongamos además que T verifica $T^4 = 8T^2 - 16\,\mathrm{Id}$ y no es diagonalizable. Hallar el polinomio minimal y el polinomio caraterístico de T.

   c) Hallar la forma de Jordan de T, si además de lo anterior vale rango$(T - 2\,\mathrm{Id}) = 2$.

Solución (idea).

1. *a*) Aplicando el algoritmo de diagonalización se obtiene una base $\{(0,1,0),\,(1,-1/2,0),\,(-3,1,1)\}$ en la cual $\Phi(0,1,0)=2$, $\Phi(1,-1/2,0)=-1/2$ y $\Phi(-3,1,1)=4$.
   Luego el rango es 3 y la signatura es 1.

   b) $W=[(0,1,0),\,(-3,1,1)]$ es un subespacio de dimensión máxima en el cual Φ es definida positiva.

2. *a*) Es $T=L_A$, siendo A simétrica, luego T es autoadjunto (y por lo tanto normal). Como A no es ortogonal, entonces T no es una isometría.

   b) Los subespacios propios son

$$E_0=[(2,1,1)],\quad E_{-2}=[(0,1,-1)],\quad E_3=[(-1,1,1)].$$

   Luego la base es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1),\,\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1),\,\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right\}.$$

3. *a*) Se prueba usando que como $T|_W\in\mathcal{L}(W)$ es autoadjunto, entonces es diagonalizable en una base ortonormal.

   b) Hay 8 subespacios T-invariantes (la parte delicada es probar que no hay más, esto se demuestra usando la parte anterior).

4. *a*) Es $T^{-1}=\frac{-1}{16}\left(T^3-8T^2+24T-32\,\mathrm{Id}\right)$.

   b) Los polinomios $(t-2)^4$ y $(t-2)^2(t+2)^2$ se anulan en T, luego $m_T(t)=(t-2)$ o $m_T(t)=(t-2)^2$. Como T no es diagonalizable, concluimos $m_T(t)=(t-2)^2$. Luego $\chi_T(t)=-(t-2)^5$.

   c) De $\mathrm{rango}(T-2\,\mathrm{Id})=2$ deducimos $\mathrm{MG}(2)=3$. Entonces hay 3 bloques y el mayor es de orden 2, luego

$$J=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$