Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Examen teórico. 28/12/2020

En lo que sigue V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita.

1. (**40 puntos**)
   Supongamos $\Bbbk = \mathbb{R}$.
   a) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V. ¿Qué se puede decir de $[T]_{\mathcal{B}}$ cuando T es autoadjunto?
   b) Dar un ejemplo de un operador que es autoadjunto y de uno que no lo es, justificando el porqué.
   c) Definir matriz *ortogonal*. ¿Qué quiere decir que $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sean ortogonalmente equivalentes?
   d) Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, probar que A es simétrica si y solo si es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

2. (**30 puntos**)
   Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, siendo $\Bbbk = \mathbb{R}$.
   a) Definir qué quiere decir que φ sea *definida positiva* y que sea *no definida*. Dar ejemplos de cada uno de esos casos.
   b) Enunciar la *Ley de inercia de Sylvester*.
   c) Probar que las cantidades de entradas diagonales positivas, negativas y nulas de una representación matricial diagonal arbitraria de φ, coinciden respectivamente con las cantidades de valores propios positivos, negativos y nulos de una representación matricial arbitraria de φ.

3. (**30 puntos**)
   Sea T un operador en V y $\mathcal{C}$ un ciclo de T correspondiente a $\lambda \in \Bbbk$.
   a) ¿Qué quiere decir que $\mathcal{C}$ sea un *ciclo* de T correspondiente a λ?
   b) Probar que λ es un valor propio de T.
   c) Probar que $\mathcal{C}$ es LI.

Nota. Las preguntas alcanza con responderlas, no es necesario incluir pruebas. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice …, entonces …"