Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Examen 12/02/2021

1. (**30 puntos**)
Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno y de dimensión finita. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Probar.

   a) Los operadores $T + i\,\mathrm{Id}$ y $T - i\,\mathrm{Id}$ conmutan entre sí.

   b) Valen $\|T(v) + iv\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2$ y $\|T(v) - iv\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2$, para todo $v \in V$.

   c) Los operadores $T + i\,\mathrm{Id}$ y $T - i\,\mathrm{Id}$ son invertibles.

   d) El operador $S := (T + i\ \mathrm{Id}\,) \circ (T - i\ \mathrm{Id}\,)^{-1}$ es una isometría.

2. (**30 puntos**)

Sea V de dimensión finita y $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$ no degenerada. Sea Φ la forma cuadrática asociada.

   a) Probar que si $u, v \in V$ son tales que $\varphi(u, w) = \varphi(v, w)$, para todo $w \in V$, entonces $u = v$.

   b) Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base φ-ortogonal de V.

      1) Probar $\Phi(e_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

      2) Probar $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(v, e_i)}{\Phi(e_i)} e_i$, para todo $v \in V$.

   c) Probar que si $\alpha \in V^*$, entonces existe un único $w \in V$ tal que $\alpha(v) = \varphi(v, w)$, para todo $v \in V$.

3. (**40 puntos**)
Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2,\ x_2 + 3x_3,\ x_4,\ 2x_4 + x_5),$$

para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

   a) Sea $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Probar $u \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^3$.

   b) Hallar la forma de Jordan de T.

   c) Hallar una base de Jordan correspondiente.

Solución.

1. *a)* Vale $(T+i\,\mathrm{Id}\,)(T-i\,\mathrm{Id}\,)=(T-i\,\mathrm{Id}\,)(T+i\,\mathrm{Id}\,)=T^2+\mathrm{Id}\,$.

   b) $\|T(v)\pm iv\|^2=\langle T(v)\pm iv,\,T(v)\pm iv\rangle=\cdots=\|T(v)\|^2+\|v\|^2$.

   c) Si $v\in\mathrm{Ker}(T\pm i\,\mathrm{Id}\,)$, entonces

   $$0=\|T(v)\pm iv\|^2=\|T(v)\|^2+\|v\|^2\quad\Rightarrow\quad\|T(v)\|=\|v\|=0\quad\Rightarrow\quad v=0.$$

   Luego $\mathrm{Ker}(T\pm i\,\mathrm{Id}\,)=\{0\}$ y al ser V de dimensión finita, deducimos que $T+i\,\mathrm{Id}$ y $T-i\,\mathrm{Id}$ son operadores invertibles.

   d) Es $S(T-i\,\mathrm{Id}\,)=(T+i\,\mathrm{Id}\,)\ \Rightarrow\ (T-i\,\mathrm{Id}\,)^*S^*=(T+i\,\mathrm{Id}\,)^*\ \Rightarrow\ (T+i\,\mathrm{Id}\,)S^*=T-i\,\mathrm{Id}\,$, luego $S^*=(T+i\,\mathrm{Id}\,)^{-1}(T-i\,\mathrm{Id}\,)$. Entonces,

   $$S^*S=(T+i\,\mathrm{Id}\,)^{-1}(T-i\,\mathrm{Id}\,)(T+i\ \mathrm{Id}\,)(T-i\ \mathrm{Id}\,)^{-1}=(T+i\,\mathrm{Id}\,)^{-1}(T+i\,\mathrm{Id}\,)(T-i\,\mathrm{Id}\,)(T-i\ \mathrm{Id}\,)^{-1}=\mathrm{Id}\,.$$

   Luego $S^*S=\mathrm{Id}\,$, lo cual implica que S es una isometría.

2. *a)* $\varphi(u,w)=\varphi(v,w),\ \forall w\in V\Rightarrow\quad\varphi(u-v,w)=0,\ \forall w\in V\Rightarrow\quad u-v\in\mathrm{Rad}(\varphi)=\{0\}\Rightarrow\quad u=v.$

   b) Sea $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ una base φ-ortogonal de V.

      1) $M_{\mathcal{B}}(\varphi)=\mathrm{diag}\big(\Phi(e_1),\dots,\Phi(e_n)\big)$. Como φ es no degenerada, entonces $\mathrm{rango}(\varphi)=n$, lo cual equivale a $\Phi(e_i)\neq 0$, para todo $i=1,\dots,n$.

      2) $v=\sum_{i=1}^n a_ie_i\Rightarrow\quad\varphi(v,e_k)=a_k\Phi(e_k),\ \forall k=1,\dots,n\Rightarrow\quad a_k=\frac{\varphi(v,e_k)}{\Phi(e_k)},\ \forall k=1,\dots n.$

   c) Sea $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ una base φ-ortogonal de V. Si existe un tal w, entonces $w=\sum_{i=1}^n\frac{\varphi(w,e_i)}{\Phi(e_i)}e_i=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha(e_i)}{\Phi(e_i)}e_i$. Luego $w=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha(e_i)}{\Phi(e_i)}e_i$, esto prueba la unicidad. Además

   $$\varphi(e_k,w)=\varphi\left(e_k,\sum_{i=1}^n\frac{\alpha(e_i)}{\Phi(e_i)}e_i\right)=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha(e_i)}{\Phi(e_i)}\varphi(e_k,e_i)=\alpha(e_k),\ \forall k=1,\dots,n.$$

   Luego la linealidad de α y de φ en su primera variable implican $\alpha(v)=\varphi(v,w)$, para todo $v\in V$.

3. *a)* Es

   $$(T-2\,\mathrm{Id}\,)(u)=(-1,1,0,0,0),\quad(T-2\,\mathrm{Id}\,)^2(u)=(0,-1,1,0,0),\quad(T-2\,\mathrm{Id}\,)^3(u)=(0,0,0,0,0).$$

   b) Es $T=L_A$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0\\1&2&0&0&0\\0&1&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&2&1\end{pmatrix}$. Es $\chi_T(t)=-(t-2)^3(t-1)^2$. Vale $\mathrm{MG}(2)=1$ y $\mathrm{MG}(1)=1$; luego la forma de Jordan de T es

   $$J=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

La base de Jordan tiene la forma

$$\mathcal{B} = \left\{ (T - 2\,\mathrm{Id}\,)^2(u),\ (T - 2\,\mathrm{Id}\,)(u),\ u,\ (T - \mathrm{Id}\,)(v),\ v \right\},$$

siendo $u \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^3 \setminus \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^2$ y $v \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)^2 \setminus \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)$. Por la parte anterior podemos tomar $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Es

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\} \\ \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)^2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 :\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Tomamos $v = (0, 0, 0, 1, 0)$. Luego una base de Jordan es

$$\mathcal{B} = \{(0, -1, 1, 0, 0),\ (-1, 1, 0, 0, 0),\ (1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 0, 0, 0, 2),\ (0, 0, 0, 1, 0)\}.$$