**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Álgebra Lineal II**
**Segundo semestre 2020**

**Examen 25/02/2021**

1. (**30 puntos**)
   Sea $A \in M_2(\mathbb{k})$ fija. Definimos $T_A \in \mathcal{L}\big(M_2(\mathbb{k})\big)$ mediante $T_A(X) = AX$, para todo $X \in M_2(\mathbb{k})$ (producto de matrices). En lo que sigue, si $V_1$ y $V_2$ son dos vectores de $\mathbb{k}^2$ (escritos en forma de columna), entonces $(V_1|V_2) \in M_2(\mathbb{k})$ denotará a la matriz cuyas columnas son $V_1$ y $V_2$.

   *a*) Probar que si el vector columna $V_1 \in \mathbb{k}^2$ es un vector propio de $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^2)$, entonces la matriz $(V_1|0) \in M_2(\mathbb{k})$ es un vector propio de $T_A$.

   *b*) Supongamos que $\lambda$ es un valor propio de $T_A$ con vector propio $(V_1|V_2) \in M_2(\mathbb{k})$.
   Indicar si alguna de las siguientes afirmaciones es correcta, justificando la respuesta.
   1) $V_1$ y $V_2$ son vectores propios de $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^2)$.
   2) $V_1$ o $V_2$ es vector propio de $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^2)$, pero alguno puede no serlo.

   *c*) Probar que si $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^2)$ es diagonalizable, entonces $T_A \in \mathcal{L}\big(M_2(\mathbb{k})\big)$ es diagonalizable.
   *Sugerencia:* obtener una base de vectores propios de $T_A$ a partir de una de $L_A$.

   *d*) Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} -14 & 30 \\ -9 & 19 \end{smallmatrix}\right)$. Hallar una base de $M_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de $T_A$.

2. (**35 puntos**)
   Se define $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mediante

$$\langle (x,y,z),(x',y',z') \rangle = xx' + 2yy' + 2zz' - xy' - x'y - yz' - y'z.$$

   *a*) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno (asumir que es bilineal y probar solo las otras propiedades).
   *Sugerencia:* se puede probar directamente o usar técnicas de formas bilineales.

   De ahora en adelante se considera $\mathbb{R}^3$ con este producto interno.

   *b*) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

   *c*) Se define $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$T(x,y,z) = (x, x-z, y-z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Investigar si $T$ es autoadjunto, normal o isometría.

3. (**35 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ definida por

$$T(x,y,z,t) = (3x + 2y + z + t,\ -x - z - t,\ y + 3z + t,\ x + y + 2t), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

   *a*) Hallar la forma de Jordan $J$ de $T$.

   *b*) Hallar una base de Jordan correspondiente a $J$.

**Solución.**

1. 
   *a*) Cuentas.

   *b*) La 2) es la correcta, dado que $V_1$ o $V_2$ pueden ser nulos, pero no ambos nulos.

   *c*) Si $L_A \in \mathcal{L}(\Bbbk^2)$ es diagonalizable, entonces existe $\{V_1, V_2\}$ base de $\Bbbk^2$ formada por vectores propios de $L_A$. Es fácil de probar que

   $$\mathcal{B} = \{(V_1|0),\, (V_2|0),\, (0|V_1),\, (0|V_2)\}$$

   es un conjunto LI. Luego $\mathcal{B}$ es una base de $M_2(\Bbbk)$ formada por vectores propios de $T_A$ y por lo tanto $T_A \in \mathcal{L}\big(M_2(\Bbbk)\big)$ es diagonalizable.

   *d*) Es $\chi_A(t) = t^2 - 5t + 4$, luego $A$ tiene valores propios 1 y 4. Podemos tomar $V_1 = (2,1)$ correspondiente a 1 y $V_2 = (5,3)$ correspondiente a 4. Luego una base es

   $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. 
   *a*) Aplicando el algoritmo de diagonalización de formas bilineales simétricas se obtienen

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Luego $\langle\ ,\ \rangle$ es definida positiva, que es lo mismo que un producto interno.

   *b*) Del cálculo anterior se deduce que $\mathcal{B} = \{(1,0,0),\, (1,1,0),\, (1,1,1)\}$ es una base ortonormal.

   *c*) Es

   $$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Como las columnas de $[T]_{\mathcal{B}}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, deducimos que $T$ es una isometría, y por lo tanto es normal. Además $[T]_{\mathcal{B}}$ no es simétrica, luego $T$ no es autoadjunto.

3. Es $T = L_A$, siendo

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   *a*) Es $\chi_T(t) = (t-2)^4$. Vale $\operatorname{rango}(A-2I) = 2$ y $(A-2I)^2 = 0$. Luego $\operatorname{MG}(2) = 2$ y $m_T(t) = (t-2)^2$. Entonces la forma de Jordan es

   $$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   *b*) Es $\operatorname{Ker}(T - 2\operatorname{Id}) = [(1,-1,0,1),\, (0,0,1,-1)]$. La base de Jordan tiene la forma $\mathcal{B} = \{(A-2I)(u), u, (A-2I)(v), v\}$, siendo $u, v \in \mathbb{R}^4 \setminus \operatorname{Ker}(T - 2\operatorname{Id})$. Luego podemos tomar

   $$\mathcal{B} = \{(1,-1,0,1),\, (1,0,0,0,0),\, (2,-2,1,1),\, (0,1,0,0)\}.$$