Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Examen teórico. 25/02/2021

1. (**30 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un espacio de dimensión finita n.

   a) Definir *valor propio* y *vector propio* de T

   b) Probar que si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son valores propios distintos de T y $v_1, \dots, v_k$ son vectores propios correspondientes, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es LI.

   c) Se consideran las siguientes afirmaciones,

      1) El operador T es diagonalizable.
      2) El operador T tiene n valores propios distintos.

      ¿Vale el directo, el recíproco, o son equivalentes? Justificar la respuesta (es decir, probar o dar un contraejemplo).

2. (**35 puntos**)
   Sea V un espacio on producto interno de dimensión finita.

   a) Definir operador *normal*. Dar un ejemplo de un operador normal, justificando.

   b) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Probar.

      1) Vale $||T(v)|| = ||T^*(v)||$, para todo $v \in V$.
      2) Si v es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ, entonces v es un vector propio de T^* correspondiente al valor propio $\overline{\lambda}$.
      3) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son valores propios de T con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

   c) Probar que si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal.

3. (**35 puntos**)
   Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita.

   a) Definir forma bilineal simétrica y forma cuadrática.

   b) Dar las definiciones de forma bilineal simétrica *no degenerada* y de forma bilineal simétrica *no definida*. Dar un ejemplo de una forma que verifique las dos condiciones simultáneamente. Justificar.

   c) Probar que la cantidad de entradas positivas, negativas y nulas de una matriz diagonal asociada a una forma cuadrática no depende de la representación diagonal.

Nota. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."