RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

LABORATORIO II – 2020

GUILLERMO CORTELA.

1. Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE).
2. Sobre métodos numéricos.
3. Método Forward Euler.
4. Método de Runge-Kutta.

1. SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES

- $\begin{cases} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ unicidad si $f \in C_1(R \times R^n)$
- ¿Qué quiere decir unicidad?
- Toda ODE puede ser escrita de la forma $\dot{X} = f(t, X)$
- Ejemplo: $\ddot{q} + A\dot{q} + Bq = V_0 \cos(\omega t)$

$$i = \dot{q} \Rightarrow \ddot{q} = \dot{i}$$

$$X \equiv \binom{q}{i} \Rightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B & -A \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ i_0 \end{pmatrix}$$

2. SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS

- ¿En qué consisten? $\dot{X} = f(t,X)$ $\quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, X(t)\big)dt$
- Existen métodos explícitos e implícitos. Por ahora nos centramos en los explícitos.
- Se integra con un paso h: $\mathrm{T} = [t_0, t_0 + h, \dots, t_f]$.
- Se calcula $X_i = X(t_i) = X_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\big(t, X(t)\big)dt$.
- Errores de truncamiento locales de orden h^n, $\; h < 1$.
- Errores de truncamiento globales de orden h^{n-1}.

3. MÉTODO FORWARD EULER

- $\begin{cases} \dot{X} = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
- Construyo vector de tiempos: $t_n = t_0 + nh$.
- $X_{n+1} = X_n + h\, f(t_n, X_n)$. Obtengo así el vector solución.
- ¿Qué aproximación de f nos lleva a esta solución? ¿Por qué el error que se comete con este método se llama error de truncamiento?
- Error de truncamiento local de orden h^2.
- Error de truncamiento global de orden h.

4. MÉTODO EXPLÍCITO DE RUNGE-KUTTA CLÁSICO

- $\begin{matrix} \dot{X} = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{matrix}.$

- $X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, con:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, X_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, X_n + h k_3) \end{cases}$$

- Error de truncamiento local de orden h^5 y global de orden h^4.