Transferencia de calor -métodos numéricos.
Ecuación de diferencias finitas (EDF)

El método de diferencias finitas consiste en una aproximación de derivadas parciales por expresiones algebraicas involucrando valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados llamados nodos. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, escritas en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados.
Por lo general se presentan dos grandes métodos de resolución: el método explicito, de fácil implementación e inestable, y el método implícito, complejo y estable. La implementación para establecer un esquema de diferencias finitas para la resolución de una EDP, en ambos métodos, se inicia reemplazando el dominio continuo del problema original por una malla o grilla (Fig.1) de diferencias finitas.

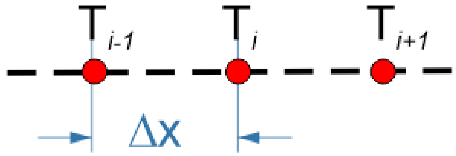

Figura 1. Grilla típica unidimensional de diferencias finitas.

Observando la figura 1 podemos escribir:

$$T_{i+1}\left(x\right)=T\left(x+\Delta x\right), \qquad T_{i-1}\left(x\right)=T\left(x-\Delta x\right).$$

La idea de una representación de diferencias finitas para una derivada puede ser introducida recordando la definición de la derivada de la función $T\left(x\right)$ [1]

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T\left(x+\Delta x\right)-T\left(x\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta x}+Error\,de\,truncamiento$$

El error de truncamiento (ET) es la diferencia entre la derivada parcial y su representación como diferencia finita. El comportamiento límite del ET es caracterizado utilizando la notación de orden.
La segunda derivada puede expresarse como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2}+O\left(\Delta x^2\right)$$

La formulación matemática del problema de la conducción de calor en la barra metálica en coordenadas cartesianas es:

[1] La aproximación de diferencias puede ser escrita de una manera más formal a través de una expansión en serie de Taylor.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q=\rho c_P\frac{\partial T}{\partial t}.$$

En el caso como unidimensional y asumiendo que no existen fuentes ni resumideros de energía calorífica, $Q=0$, puede simplificarse la expresión a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho c_P\frac{\partial T}{\partial t}$$

En función de la difusividad térmica (α) queda

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha=\frac{k}{\rho c_P},$$

presentando una derivada con respecto a *x* de segundo orden y una derivada temporal de primer orden. Si se utiliza un esquema de diferencias hacia adelante[2] para la derivada temporal y un esquema de diferencias centrales para la segunda derivada, podemos escribir la ecuación anterior como:

para la derivada espacial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}^s-2T_i^s+T_{i-1}^s}{\Delta x^2}$$

y la derivada espacial

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_i^{s+1}-T_i^s}{\Delta t}$$

siendo s el contador de intervalo de tiempo e i el nodo de la grilla.

Reemplazando estas expresiones, queda

$$\alpha\frac{T_{i+1}^s-2T_i^s+T_{i-1}^s}{\Delta x^2}=\frac{T_i^{s+1}-T_i^s}{\Delta t}$$

Se puede expresar la futura temperatura en el nodo *i-ésimo* (T_i^{s+1}) como:

$$T_i^{s+1}=T_i^s+cte\left(T_{i+1}^s-2T_i^s+T_{i-1}^s\right)$$

$$cte=\frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2}$$

[2] Se tienen varios esquemas de diferenciar, siendo los más comunes diferenciar hacia adelante $T_x(x_i)=\dfrac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i)}{\Delta x}$, hacia atrás $T_x(x_i)=\dfrac{T(x_i)-T(x_i-\Delta x)}{\Delta x}$ y simétrico $T_x(x_i)=\dfrac{T(x_i+\Delta x)-T(x_i-\Delta x)}{2\Delta x}$

T_i^{s+1} nos da la temperatura en cualquier nodo (i) en el instante de tiempo presente ($s+1$) en términos de las temperaturas nodales en el instante del tiempo anterior (s , que son conocidas).
Es recomendable que cte sea menor a ½.

Criterio de convergencia y estabilidad:
Estabilidad numérica es un concepto que se aplica en un sentido estricto sólo a problemas transientes. Un esquema numérico es estable si los errores de cualquier origen (redondeo, truncamiento, representación) no crecen desde un período transiente al siguiente.
En forma general se tiene que, si un esquema de aproximación es consistente y estable, es también convergente. En este sentido se tiene que en el caso que la grilla de aproximación se refina, la solución de la ecuación de diferencias finitas (EDF) se aproxima a la solución de la EDP original

Cuando $\Delta x, \Delta t \to 0$ el resultado debe tender a la solución real (convergencia) y error de truncamiento debe tender a cero (estabilidad). El criterio a seguir es:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\alpha}$$