

# Electromagnetismo (2020)

## Práctico 1

### Herramientas matemáticas

1. El símbolo de Levi-Civita se define como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\} \\ 0 & \text{si } i = j, i = k, \text{ o } j = k \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\} \end{cases}$$

Muestre que si  $\vec{A} = \sum_i A_i \hat{a}_i$  y  $\vec{B} = \sum_j B_j \hat{a}_j$  son dos vectores entonces:  $(\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} A_i B_j$

2. Muestre que la condición para que 3 vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  sean coplanares es:

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = 0$$

3. La inducción magnética  $\vec{B}$  se define mediante la fuerza que actúa sobre una partícula en movimiento con velocidad  $\vec{v}$  de la siguiente manera:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Suponga que al realizar experimentos sobre una partícula cargada se encontró que:

- a) Si  $\vec{v} = \hat{i}$  entonces  $\vec{F} = q(2\hat{k} - 4\hat{j})$
- b) Si  $\vec{v} = \hat{j}$  entonces  $\vec{F} = q(4\hat{i} - \hat{k})$
- c) Si  $\vec{v} = \hat{k}$  entonces  $\vec{F} = q(\hat{j} - 2\hat{i})$

A partir de estos resultados halle la inducción magnética.

4. Una nube de electrones está confinada en una región entre dos esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , con una densidad volumétrica de carga dada por  $\rho(\vec{r}) = -\frac{A}{r^4} \cos^2(\phi)$ . Halle la carga total entre las esferas.
5. En el interior de los materiales dieléctricos existe una magnitud vectorial llamada polarización, que corresponde a la densidad de momentos dipolares eléctricos por unidad de volumen  $\vec{P}(\vec{r})$ . En una varilla cilíndrica de radio  $a$  y altura  $h$ , con su eje según el eje  $z$ , existe una polarización que varía con la distancia al eje  $z$ , que llamaremos  $\rho$  (en coordenadas cilíndricas), y el ángulo azimutal  $\phi$ , que cumple  $\vec{P}(\vec{r}) = a\rho \cos^2(\phi) \hat{e}_\rho$ , donde  $\hat{e}_\rho$  es un versor según la dirección  $\rho$ . Calcular la polarización total (también llamado momento dipolar)  $\vec{p}$  de la varilla.
6. Un dipolo eléctrico  $\vec{p}$ , ubicado en el origen de coordenadas, crea un potencial electrostático  $\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ . Calcular el campo eléctrico del dipolo sabiendo que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ .

7. Calcule el gradiente  $\vec{\nabla}f(r)$  con  $f(r)$  una función escalar que depende de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

8. Calcular:

a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

b)  $\vec{\nabla} \cdot (f(r)\vec{r})$

c)  $\vec{\nabla} \cdot (r^n\vec{r})$

¿Cuánto vale la divergencia del campo Coulombiano?

9. Calcule el flujo del campo eléctrico generado por una carga puntual a través de una esfera de radio  $R$  centrada en la carga. Compare este resultado con la divergencia del campo Coulombiano. ¿Contradice esto el teorema de la divergencia?

10. Considere un campo vectorial de la forma  $\vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ . Calcular el flujo de este campo a través de la superficie lateral de un cilindro de radio  $a$  con su eje sobre el eje  $z$  y su altura entre  $-a$  y  $a$ .

11. Muestre que para cualquier vector  $\vec{v}$  y cualquier función escalar  $f$ , siempre se cumple:

a)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$

b)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$

12. ¿Cuál es la densidad de carga de un cascarón esférico uniforme y de espesor infinitesimal de radio  $R$  y carga total  $Q$  centrado en el origen?

13. Mostrar que  $\vec{\nabla}^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta^3(\vec{r})$ .