Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Licenciatura de Física
Segundo semestre 2020

Práctico 6

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices es simétrica, antisimétrica, hermitiana o antihermitiana:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar cuáles de las siguientes matrices es unitaria y cuáles son ortogonales, donde a, b y θ son números reales.

$$\begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

3. Para cada una de las siguientes matrices A
   a) Encontrar una matriz ortogonal o unitaria P y una matriz diagonal D tal que $P^*AP = D$.
   b) Describir la descomposición espectral de A.
   c) Definir explicitamente cada una de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios propios de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Se considera un espacio euclidiano $(V, \langle,\rangle)$ de dimensión finita y una transformación lineal $T : V \to V$. Sea B una base de T.
   a) Probar que T preserva producto interno si y sólo si $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle, \forall v, w \in B$.
   b) Observar que $T(B)$ también es base de V y que si B es ortonormal entonces $T(B)$ también.

5. *a*) Se considera un espacio euclidiano $(V, \langle,\rangle)$. Sea $T_c : V \to V$ la transformación lineal definida por $T(v) = cv$ para cierto escalar $c \in \mathbb{F}$. Probar que T preserva producto interno si y sólo si $|c| = 1$.
   b) Probar que si $\dim V = 1$, toda transformación lineal que preserva producto interno en V es de la forma T_c para cierto $c \in \mathbb{F}$.
   c) Explicitar todas las transformaciones ortogonales $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A.
   a) Probar que $\overline{\lambda}$ también es valor propio de A.
   b) Deducir que si n es impar, A tiene al menos un valor propio en el conjunto $\{1, -1\}$.
   c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que preserva producto interno. Probar que existe una recta que pasa por el origen que permanece fija por T.

7. En la relatividad especial, si (t, x, y, z) y (t', x', y', z') son las coordenadas espacio-temporales de una partícula medida por dos observadores O y O' que se mueven con movimiento uniforme en la dirección común de Ox, se tiene $t' = a(t - vx/c^2), x' = a(x - vt), y' = y, z' = z$, donde v es la velocidad relativa entre ambos observadores, c es la velocidad de la luz y $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ es llamado el *factor de Lorentz*.

   (a) Encuentre la matriz $L \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ que transforma (ct, x, y, z) en (ct', x', y', z').

   (b) Probar que la matriz hallada en (a) es ortogonal.

8. Considerar la matriz antisimétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real no nulo.

   (a) Encontrar un conjunto ortonormal de vectores propios para A.

   (b) Encontrar una matriz unitaria P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   (c) Probar que no existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Transformaciones ortogonales: Clasificación en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

9. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y T un operador ortogonal o unitario (según se trabaje en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) $TT^* = Id$.

   a) 1) Probar que si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, entonces $T(\mathcal{B})$ también lo es.

   2) Probar que todo valor propio de T tiene módulo 1.

   b) Supongamos ahora que $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual, y sean $\mathcal{C}$ la base canónica y $A = [T]_{\mathcal{C}}$.

   1) Probar que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ y

   $$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

   2) Deducir que $det(A) \in \{1, -1\}$.

   3) Supongamos ahora que $det(A) = 1$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ el ángulo entre v y $T(v)$ es α. Observar entonces que en este caso la transformación representa una rotación.

   4) Supongamos ahora que $det(A) = -1$. Probar que 1 y -1 son valores propios de A y deducir que A representa una simetría.

10. Supongamos ahora que $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual.

   a) Probar que T tiene valor propio 1 o -1. En lo que sigue asumimos el caso valor propio 1.

   b) Deducir que existe $S_1^{\perp}$ es un espacio de dimensión 2 que es T invariante, y determinar que tipo de transformación es T restringido a dicho plano.

   c) Clasificar geométricamente los operadores unitarios de $\mathbb{R}^3$ con un valor propio 1, y mostrar que para dichos operadores existe una base ortonormal donde la matriz asociada quedad dada por

   $$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$.

Transformaciones Hermicianas en C^2: Matrices de Pauli

11. Consideramos las siguientes matrices.

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Mostrar que toda matriz hermitiana compleja 2x2 M se escribe como combinación lineal **real** de las matrices $\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Es decir, existen reales a, b, c, d tales que

$$M = a\mathbf{1} + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3$$

   b) Un objeto algebraico asociado a las matrices muy relevante para distintos contextos de la física es el conmutador: Dadas dos matrices cuadradas de igual tamaño A, B se define la matriz conmutador como

$$[A, B] = AB - BA$$

   y mide que tanto conmutan dos matrices (si conmutan tal operación da la matriz nula). Encontrar $[\sigma_i, \sigma_j]$ para $i, j = 1, 2, 3$.