

Práctico 1

Si V es un espacio vectorial, entonces una *proyección* en V es una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ que verifica $T^2 = T$ (siendo $T^2 = T \circ T$).

1. Sean V un espacio vectorial y U, W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. Consideramos la función $T : V \rightarrow V$ definida por $T(v) = w$, siendo $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$.
 - a) Probar que T es una proyección.
 - b) Probar que T verifica $\text{Im}(T) = W$ y $\text{Ker}(T) = U$.

El operador T se llama la *proyección sobre W en la dirección de U* .

2. Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección, entonces $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$ y T es la proyección sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Ker}(T)$. *Sugerencia:* escribir $v = v - T(v) + T(v)$.
3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2. Sean $T, S : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definidas por

$$T(a + bx + cx^2) = -b + bx - bx^2, \quad S(a + bx + cx^2) = a + b + (b + c)x^2.$$

Se pide:

- a) Probar que T y S son proyecciones
 - b) Probar que vale $T \circ S = S \circ T = 0$ y $T + S = \text{Id}$.
 - c) Hallar bases de $U = \text{Im}(T)$ y de $V = \text{Im}(S)$.
 - d) Verificar $\mathbb{R}_2[x] = U \oplus V$.
4. Sea V un espacio vectorial.
 - a) Sean U, W subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. Sean P_U la proyección sobre U en la dirección de W y P_W la proyección sobre W en la dirección de U . Probar

$$P_U \circ P_W = P_W \circ P_U = 0, \quad P_U + P_W = \text{Id}.$$

- b) Recíprocamente, sean $P_1, P_2 : V \rightarrow V$ proyecciones que verifican

$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0, \quad P_1 + P_2 = \text{Id}.$$

Probar que vale $V = \text{Im}(P_1) \oplus \text{Im}(P_2)$.

5. Sean $M_n(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales $n \times n$, S el subespacio formado por las matrices simétricas y A el subespacio formado por las matrices antisimétricas.
 - a) Probar $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
 - b) Hallar explícitamente la proyección de $M_n(\mathbb{R})$ sobre S en la dirección de A y la proyección de $M_n(\mathbb{R})$ sobre A en la dirección de S .
6. Hallar una proyección P que proyecte \mathbb{R}^2 sobre el subespacio generado por el vector $(1, -1)$ en la dirección del subespacio generado por el vector $(1, 2)$.

7. Demostrar que si $P : V \rightarrow V$ es una proyección y V tiene dimensión finita, entonces existe una base \mathcal{B} de V tal que la matriz asociada a P en la base \mathcal{B} tiene la forma $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué información nos da la traza¹ de una proyección?
8. Sea V un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $P : V \rightarrow V$ una proyección. Probar que $\text{Id} + P$ es invertible y hallar su inversa.
9. Sea V un espacio vectorial y V_1, \dots, V_n subespacios de V tales que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos una función $T_i : V \rightarrow V$ mediante $T_i(v) = v_i$, si $v = v_1 + \dots + v_n$, con $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$. Probar que las funciones T_1, \dots, T_n son proyecciones que verifican
- $T_i \circ T_j = 0$ si $i \neq j$,
 - $T_1 + \dots + T_n = \text{Id}$,
 - $\text{Im}(T_i) = V_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

En esta situación se dice que T_1, \dots, T_n son la proyecciones *asociadas* a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

10. Probar que si tenemos un espacio vectorial V y proyecciones $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(V)$ que verifican 9a y 9b, entonces $V = \text{Im}(T_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(T_n)$ y T_1, \dots, T_n son la proyecciones asociadas a esta descomposición.
11. Sea $V = \mathbb{R}^4$. Se consideran los siguientes subespacios

$$V_1 = \{(x, y, z, t) : x = y = z\}, \quad V_2 = [(2, 1, 1, 1)], \quad V_3 = [(2, 2, 1, 1)].$$

- Probar que vale $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.
 - Hallar la proyecciones asociadas a la descomposición anterior.
12. Sea $V = M_n(\mathbb{k})$. Se consideran los siguientes subespacios

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0, \text{ si } i < j\}, \\ V_2 &= \{(a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0, \text{ si } i > j\}, \\ V_3 &= \{(a_{ij}) \in V : a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j\}. \end{aligned}$$

- Probar que vale $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.
- Hallar la proyecciones asociadas a la descomposición anterior.

¹La traza de un operador se define como la traza de la matriz asociada al operador en alguna base del espacio. La definición anterior no depende de la elección de la base, porque matrices semejantes tienen la misma traza.