Ejercicios de EDP.

Soluciones particulares a ecuaciones particulares.

1. Una función $u(t,x)$ de la forma $u(t,x) = v(x-ct)$, (x real), se llama una onda viajera con perfil v. Halle todas las soluciones $u(t,x)$ de onda viajera de la ecuación de ondas, de la ecuación de Airy y de la ecuación del haz. ¿Hay soluciones de este tipo acotadas para la ecuación del calor?

2. Halle soluciones de onda viajera (a veces llamadas solitónes) de la ecuación KdV (este ejercicio tiene cierta dificultad). Grafique la solución en el plano $x - t$. (Sug. buscar preintegrales de la PDE asociada y luego busque soluciones con $v, v', v'' \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$).

3. Halle todos los polinomios homogéneos de grado n,

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k y^{n-k}, \tag{1}$$

soluciones a la ecuación de Laplace (es decir, polinomios homogéneos armónicos). Haga un gráfico de dichas soluciones.

Ecuación de Laplace.

1. (a) Demuestre que si u y v son dos funciones armónicas entonces,

$$\nabla(u\nabla v) = \nabla(v\nabla u). \tag{2}$$

   (b) Pruebe el teorema del valor medio,

$$u(y) = \fint_{\partial B(y,r)} u(x)ds(x), \tag{3}$$

   usando la igualdad anterior (2) con $v(x)$ la solución fundamental Φ centrada en y.

2. Sead $D(d)$ el disco cerrado de centro $(0,0)$ y radio d en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Demuestre que en coordenadas polares (r,θ), el Laplaciano se escribe como,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}. \tag{4}$$

   (b) Demuestre que para todo ángulo $\varphi \in [0, 2\pi)$ fijo, el núcleo de Poisson,

$$P(r, \theta - \phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{d^2 - r^2}{d^2 - 2dr\cos(\theta - \varphi) + r^2}, \tag{5}$$

   es C^∞ en el interior $D(d)^\circ$ de $D(d)$ y satisface la ecuación de Laplace, es decir que es armónico.

(c) Demuestre que si $h(\varphi)$ es una función continua en $\partial D(d)$ (parametrizamos $\partial D(d)$ con φ) entonces la función u en $D(d)^\circ$ definida como la convolución,

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)h(\varphi)d\varphi, \tag{6}$$

satisface la ecuación de Laplace.

(d) En esta parte consideramos a $P(r,\theta-\varphi)$ como una familia de funciones de θ parametrizada en r. Demuestre que $P(r,\theta-\varphi)$ es un núcleo de Dirac, es decir, demuestre que, fijo φ, la familia $P(r,\theta-\varphi)$ satisface las siguientes propiedades:

i. $P(r,\theta-\varphi) > 0$,

ii. $\int P(r,\theta-\varphi)d\theta = 1$,

iii. para todo $\epsilon > 0$, $\max\{P(r,\theta-\varphi) : |\theta-\varphi| \geq \epsilon\} \to 0$ as $r \to d^-$.

Una manera informal de decir lo anterior es $P(d,\theta-\varphi) = \delta(\theta-\varphi)$.

(e) Concluya que la función $\bar{u}$ en $D(d)$ definida como (6) en $D(d)^\circ$ y como h en $\partial D(d)$, es continua y por lo tanto es una solución al problema de Dirichlet,

$$\Delta\bar{u}\big|_{D(d)^\circ} = 0, \quad \bar{u}|_{\partial D(d)} = h, \tag{7}$$

(haga una prueba, no un argumento).

(f) Demuestre usando el principio del máximo que el problema de Dirichlet (7) tiene solución única.

Fecha: 12/04

3. (a) Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ una función holomorfa de variable compleja $z = x+iy$, donde U y V son abiertos ($f(U)$ puede no ser igual a V y f puede ser no inyectiva). Sea $u : V \to \mathbb{R}$ una función armónica. Demuestre usando las ecuaciones de Cauchy Riemann que $u(f(x,y)) = u(f(z))$ es una función armónica.

(b) Sea D el disco cerrado de radio uno centrado en $(1,0)$. Parametrizamos ∂D con $\theta : [0,2\pi) \to (1+\cos\theta, \sin\theta)$. Resuelva el problema de Dirichlet,

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial D}(\theta) = e^{2(1+\cos\theta)}(1-2\sin^2\sin\theta), \tag{8}$$

donde u es C^2 en D. Sug.: Use la parte (3a) convenientemente.

4. Sea D el disco de centro el origen y radio uno.

(a) Demuestre que (a menos de una constante multiplicativa) las únicas funciones armónicas regulares de D de la forma,

$$u = R(r)\Theta(\theta), \tag{9}$$

(r y θ son coordenadas polares), son,

$$\{1, r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\cos 2\theta, r^2\sin 2\theta, \ldots\}. \tag{10}$$

(b) Sea $h : \partial D \to \mathbb{R}$ una función C^∞. Pensamos a h como una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞ y de período 2π, con desarrollo de Fourier,

$$h(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \tag{11}$$

donde los coeficientes de Fourier a_n y b_n tienen las expresiones,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\cos n\theta d\theta, \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)\sin n\theta d\theta. \tag{13}$$

Del curso de ecuaciones diferenciales sabemos que la serie de Fourier converge uniformemente a h en C^∞,[1]. Halle la solución C^2 al problema de Dirichlet,

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial D} = h, \tag{14}$$

como una serie de las funciones (10). Sug.: Use la representación de h en series de Fourier y para probar convegencia use el teorema de la mayorante de Weierstrass y el hecho de que (como h es C^∞) los coeficientes a_n y b_n decaen más rápido que cualquier potencia de n, esto es, para todo $k \geq 1$ existe $c_k > 0$ tal que,

$$|a_n| \leq \frac{c_k}{n^k}, \quad |b_n| \leq \frac{c_k}{n^k}, \tag{15}$$

para todo $n \geq 1$.

(c) Sume explícitamente la expresión obtenida y deduzca la fórmula de Poisson (6).

5. Use la desigualdad de Harnak para demostrar que una función armónica definitida en todo $\mathbb{R}^n$ y positiva, es necesariamente constante.

Fecha: 14/04

6. (a) Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que $\partial^\alpha u/\partial x^\alpha = 0$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \geq k > 0$, ($k \in \mathbb{Z}$). Demuestre que u es un polinomio de orden menor que k.

(b) Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función armónica con crecimiento polinomial en infinito, esto es, existen $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ y $k > 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) tal que,

$$|u|(x) \leq c_1 + c_2|x|^k \tag{16}$$

[1] Una serie de funciones C^∞, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta)$, converge uniformemente en C^∞ a una función $h(\theta)$ si para cada $k \geq 0$, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(\theta)$ converge uniformemente a $h^{(k)}(\theta)$. El índice superior (k) siginifica la derivada k-ésima de la función.

Demuestre que u es un polinomio.

7. (Este ejercicio demuestra cierta compacidad del espacio de funciones armónicas acotadas en un dominio U fijo). Dado U abierto de $\mathbb{R}^n$ y constantes $c_1 < c_2$, sea $H(c_1, c_2, U)$ el conjunto de las funciones armónicas $u : U \to \mathbb{R}$ con $c_1 \leq u \leq c_2$. Demuestre que toda sucesión en H tiene una subsucesión puntualmente convergente a una función de H, que converge uniformemente en todo compacto de U.

FECHA: 21/04

8. Ejercicios en el Evans: Sección 2.5, problemas 3, 4, 5, 6.

FECHA: 1/05

9. Probar que toda solución C^2, $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la ecuación no-lineal,

$$\Delta u = f(u), \tag{17}$$

con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^∞, es de hecho C^∞. Esto es un caso particular de lo que se conoce como "Bootstrapping" de regularidad ellíptica, donde de la regularidad inicial de la solución (en este caso C^2) y de la ecuación en sí (en este caso (17)), se prueba recurrentemente que la solución posee de hecho más regularidad que la asumida o disponible (i.e. $u \in C^2 \Rightarrow u \in C^3 \Rightarrow u \in C^4 \Rightarrow .....$).

FECHA: 9/05

Ecuación del calor

1. Ejercicios del Craig: 3.3

2. Ejercicios del Evans: 12, 13, 14, 15, 16, 17

FECHA: 31/05

3. Sea $u(x,t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, la única solución acotada de la ecuación del calor con dato inicial $u(x,0) = g(x)$, C^∞ y de soporte acotado. Use la representación de dicha solución en términos de la solución fundamental para probar que $u(x,t)$ es C^∞, en particular tiene todas sus derivadas continuas sobre $\{t = 0\}$.

4. (a) Sea $u(x,0) = g(x) \geq 0$, $(x \in \mathbb{R})$, un dato initial no negativo y de soporte compacto, (asumimos que $g(x) > 0$ para algún x). Sea $u(x,t)$ la única solución acotada a la ecuación del calor con ese dato inicial. Definimos la *entropía* $S(t)$, (depende del tiempo), como,

$$S(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) \ln u(x,t)\, dx. \tag{18}$$

Demuestre que $S(t)$ es monotónicamente decreciente,

$$\frac{dS(t)}{dt} \leq 0. \tag{19}$$

(b) Calcule la entropía $S(t)$ de la solución fundamental.

Ecuación de ondas

1. Ejercicios del Evans: 18, 20.

FECHA: 3/06

2. Demuestre con un ejemplo en una dimensión espacial ($n = 1$) que no puede haber un principio del máximo para la ecuación de ondas (i.e. pruebe que existen datos iniciales, aún de soporte compacto, tal que su evolución alcanza su máximo en tiempos positivos).

3. Halle la solución explícita a la ecuación de ondas en tres dimensiones espaciales ($n = 3$) con dato inicial,

$$u(x,0) = \begin{cases} \sqrt{1-|x|^2} & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases} \tag{20}$$

y,

$$\partial_t u(x,0) = 0, \tag{21}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Sug: Trabaje en coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$.

4. *Ecuación inhomogénea y principio de Duhamel.*

(a) Consideramos la ecuación no homogénea (con fuente),

$$\partial_t^2 u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t), \tag{22}$$

donde $f : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ es C^1. Buscamos una representación a la solución del problema de Cauchy con dato inicial $u(x,0) = 0,\ \partial_t u(x,0) = 0$. Observe que al haber fuente la solución no es automáticamente trivial. La representación sigue el principio de Duhamel. Para cada $s \geq 0$ definimos como $u_s(x,t)$ la única solución C^2 al problema de Cauchy,

$$\partial_t^2 u_s(x,t) - \partial_x^2 u_s(x,t) = 0, \quad u(x,s) = 0, \quad \partial_t u(x,s) = f(x,s). \tag{23}$$

Demuestre que,

$$u(x,t) = \int_0^t u_s(x,t) ds, \tag{24}$$

es la solución C^2 a (22) con dato inicial $u(x,0) = 0,\ \partial_t u(x,0) = 0$.

(b) Dé una fórmula explícita para la solución de la parte anterior usando la fórmula de D'Alambert.

(c) Halle $u(x,t)$ como en la primera parte con la siguiente fuente (deje de lado cuestiones de diferenciabilidad),

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1, \ \text{y} \ \ 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \ \text{o} \ \ t > 1. \end{cases} \tag{25}$$

Fecha: 22/06

5. Capítulo 5 del libro de Evans, Espacios de Sobolev. Ej: $3, 14, 20, 21$.

6. (a) Halle todas las soluciones por separación variables al problema de valor propios,

$$\Delta u = -\lambda u, \quad u|_{\partial U} = 0, \tag{26}$$

en $U = \{(x, y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$.

(b) ¿Qué dimensiones tienen los espacios propios? ¿Cómo están espaciados los valores propios?

(c) Demuestre que toda función $f \in L^2(U)$ se puede expandir (en $L^2(U)$) en función de las funciones propias (puede resultar difícil).

(d) Resuelva formalmente el problema de Dirichlet no homogéneo,

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\partial U} = 0, \tag{27}$$

donde $U = \{(x, y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$ y $f \in L^2(U)$. ¿En qué sentido satisface la ecuación la solución formal? (esta pregunta es algo imprecisa).

(e) Demuestre que toda función propia (asuma que es C^2 aunque esto puede eliminarse) es una combinación lineal finita de las halladas en (6a).

Fecha: 12/07

Ecuaciones elípticas lineales de segundo orden

1. Indique cuáles de los siguiente operadores lineales de segundo orden son elípticos en la bola de centro el origen y radio uno en $\mathbb{R}^3$, (para simplificar la notacin hacemos, $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$),

$$-Lu = 4\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u + 4\partial_2^2 u, \tag{28}$$

$$-Lu = e^{-1/(1-|x|^2)}\Delta u, \tag{29}$$

$$-Lu = (1 + x_2)\partial_1^2 u + e^{1+x_2}\partial_2^2 u + (1 + x_3)\partial_3^2 u, \tag{30}$$

$$-Lu = 2\partial_1^2 u + 3\partial_2^2 u + (1 + e^{x_1})\partial_3^2 u. \tag{31}$$

En los casos en que sea elíptico, ¿puede estimar una constante de elipticidad?.

2. Halle la forma bilineal $B : H_0^1(\mathbb{R}^3) \times H_0^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, definida por los siguientes operadores elípticos en $\mathbb{R}^3$,

$$Lu = -\Delta u + 2u, \tag{32}$$

$$Lu = -(1 + |x|^2)\Delta u + x_1\partial_1 u - 4u, \tag{33}$$

$$Lu = -4\partial_1^2 u + \partial_1\partial_2 u - 4\partial_2^2 u - \partial_3^2 u. \tag{34}$$

Si se restringe L a $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$, ¿puede decir si al menos una de las formas B satisface las hipótesis de Lax-Milgram?

3. Considere el operador lineal en $U = B(0,2) \subset \mathbb{R}^3$ definido por $Lu = -\Delta u + x_3 u$. ¿Puede dar un $\gamma > 0$ tal que si $\mu \geq \gamma$ el operador $L_\mu u = Lu + \mu u$ satisface las hipótesis de Lax-Milgram?

4. Considere el problema de Dirichlet en $U = B(0,r) \subset \mathbb{R}^2$, $Lu = -\Delta u - 2u = f, \quad u|_{\partial U} = 0$. Demuestre que si r es suficientemente pequeño, el problema tiene existencia y unicidad para todo $f \in L^2(U)$. Sug: use que los valores propios de Dirichlet del Laplaciano en $B(0,1)$, esto es el conjunto de los λ tal que $-\Delta u = \lambda u$, $u|_{\partial B(0,1)}$ tiene una solución débil no trivial, están ordenados $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ y que la función propia del primer valor propio es rotacionalmente simétrica.

5. Capítulo 6 del libro de Evans, Ecuaciones Elípticas de Segundo Orden. Ej: 1, 2, 4 (puede ser difícil), 5 (puede ser difícil), 7.